39,20 lei

UNIVERSITATEA DIN CLUJ-NAPOCA
Facultatea de Matematică și Fizică

T.OPROIU Á.PÁL V.POP V.URECHE

ASTRONOMIE

CULEGERE DE EXERCIȚII, PROBLEME ȘI PROGRAME DE CALCUL

Cluj-Napoca
1989

UNIVERSITATEA DIN CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

T. OPROIU Á. PÁL V. POP V. URECHE

A S T R O N O M I E

CULEGERE DE EXERCIŢII,
PROBLEME ŞI PROGRAME DE
CALCUL

EDIŢIA A II-A

CLUJ-NAPOCA
1989

C U P R I N S

Prefaţă 3

P A R T E A Î N T Î I . EXERCIŢII ŞI PROBLEME 5

CAP.I: Elemente de geometrie pe sferă şi de trigonometrie sferică 6

CAP.II: Astronomia sferică 23

CAP.III: Pământul - corp ceresc 51

CAP.IV: Fenomene care modifică poziţiile aştrilor pe cer 67

CAP.V: Timpul şi măsurarea lui 89

CAP.VI: Mişcările aparente ale planetelor şi sateliţilor. Cinematica mişcării eliptice 101

CAP.VII: Mecanică cerească 129

CAP.VIII: Teoria radiaţiei. Fotometria astronomică . . 207

CAP.IX: Aplicaţii ale analizei spectrale în astrofizică 216

CAP.X: Parametrii de stare ai stelelor. Relaţii de stare 221

CAP.XI: Atmosfere stelare 227

CAP.XII: Interiorul stelelor 234

CAP.XIII: Galaxia noastră 247

CAP.XIV: Elemente de astronomie extragalactică 254

CAP.XV: Originea şi evoluţia corpurilor cereşti 257

P A R T E A A D O U A . PROGRAME DE CALCUL 261

Consideraţii generale 262

PROGRAMUL 1: Transformarea coordonatelor orizontale în coordonate ecuatoriale şi invers 265

PROGRAMUL 2: Transformarea coordonatelor ecuatoriale date pentru epoca 1950.0 în coordonate ecuatoriale pentru epoca t , ţinîndu-se seama de precesie 269

PROGRAMUL 3: Calcularea coordonatelor geocentrice ecuatoriale rectangulare ale unui punct de pe suprafaţa Pământului pentru care se cunosc coordonatele geodezice 272

PROGRAMUL 4: Determinarea datei iuliene corespunzătoare unei date calendaristice (din calendarul gregorian sau iulian) 274

PROGRAMUL 5: Determinarea datei calendaristice (în calendarul iulian sau gregorian) corespunzătoare unei zile iuliene date 279

PROGRAMUL 6: Determinarea timpului sideral (mediu şi aparent) pentru localitatea Greenwich, la 0^h Timp Universal 282

PROGRAMUL 7: Determinarea elementelor orbitei eliptice a unui satelit artificial al Pământului, cunoscîndu-se poziţia şi viteza la un moment dat (metoda lui Laplace) 286

PROGRAMUL 8: Determinarea orbitelor circulare ale sateliţilor artificiali ai Pământului din două observaţii optice de poziţie 290

PROGRAMUL 9: Calcularea efemeridei unei mici planete sau comete pe baza elementelor orbitale keplериene 300

PROGRAMUL 10: Calcularea efemeridei Soarelui 310

PROGRAMUL 11: Calcularea simultană a efemeridelor Soarelui şi Lunii şi determinarea fazelor Lunii . . 314

PROGRAMUL 12: Calcularea efemeridelor pentru planetele mari din cuprinsul sistemului solar 317

PROGRAMUL 13: Rezolvarea unui sistem liniar de n ecuaţii cu m necunoscute ($n \geq m$) prin metoda celor mai mici pătrate 326

PROGRAMUL 14: Integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale a lui Lane-Emden referitoare la structura unei stele politropice 334

PROGRAMUL 15: Determinarea perioadei de variaţie a strălucirii la stele variabile 339

Bibliografie 346

PREFAȚĂ

Exercițiile și problemele sînt menite să faciliteze însușirea cursului predat, reprezentînd aprofundări ale bazelor teoretice ale astronomiei, iar programele de calcul înlesnesc efectuarea unor calcule mai laborioase specifice acestei discipline.

Lucrarea de față urmează ordinea și conținutul capitolelor manualului publicat de Á. Pál și V. Ureche: Astronomie (Editura didactică și pedagogică, București, 1983), adresat studenților facultăților sau secțiilor de matematică ale universităților din țară, potrivit cu planul de învățămînt în vigoare. Excepție face capitolul I, care cuprinde noțiuni și formule necesare în unele capitole, din geometria pe sferă și trigonometria sferică.

Fiecare capitol al culegerii conține exerciții și probleme rezolvate de autori, pentru a explica, prin exemplele alese, conținutul mai dificil al chestiunilor teoretice din manual; este, de asemenea, propus pentru rezolvare individuală un număr minim de probleme, la care am dat numai răspunsul, iar în unele cazuri și indicații pentru soluționarea lor.

Volumul cunoștințelor înglobate în exemplele noastre diferă de la un capitol la altul, aceasta și în funcție de gradul de completitudine a explicațiilor conținute în diversele părți ale manualului la care ne referim.

Autorii au socotit utilă prezentarea unor figuri matematice, care își au rolul cunoscut în rezolvarea problemelor,

precum și a unor tabele, a căror analiză conduce la descifrarea unor legități în studiul fenomenelor astronomice.

Spre deosebire de lucrări cu caracter riguros de cercetare științifică, în lucrarea de față precizia calculelor numerice nu este esențială. De aceea, am admis obținerea soluțiilor cu diferite precizii și sîntem de părere că și cei ce vor folosi prezenta culegere vor putea rotunji datele exacte din exercițiile și problemele formulate, firește, în interiorul unor limite raționale.

Această ultimă observație nu se referă însă la programele de calcul, a căror includere în prezenta culegere are și scopul de a veni în ajutorul celor care se inițiază în cercetarea astronomică, în cadrul cercului științific studențesc sau al elaborării lucrărilor de diplomă. Programele sînt elaborate pentru microcalculatoare, în limbajul BASIC.

Rezultat al unei colaborări colegiale de mai mulți ani, volumul a fost redactat astfel: coordonarea și capitolele III, VI, VII - de prof. dr. Á. Pál, capitolele VIII-XV - de lect. dr. V. Ureche, capitolele I, II, IV, V - de lect. dr. V. Pop, iar programele de calcul - de cercet. șt. dr. T. Oproiu.

Autorii mulțumesc și pe această cale cercetătorului principal dr. I. Todoran, cercetătorului științific dr. V. Mioc și analistului programator B. Pârv pentru valoroasele lor observații și sugestii exprimate în vederea îmbunătățirii conținutului lucrării.

AUTORII

PARTEA ÎNTÎI

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

CAPITOLUL I

ELEMENTE DE GEOMETRIE PE SFERĂ ŞI DE TRIGONOMETRIE SFERICĂ

1.1 Care sînt elementele de bază ale geometriei sferice ?

Răspuns: Geometria sferică se ocupă cu studiul figurilor de pe o sferă. Dreptelor şi segmentelor de dreaptă din geometria plană le corespund cercuri şi arce de cercuri pe sferă.

Deosebim:

- cercuri mari, ale căror plane trec prin centrul sferei;
- cercuri mici, ale căror plane nu trec prin centrul sferei.

Prin două puncte ale sferei trece un cerc mare şi numai unul, dacă cele două puncte nu sînt diametral opuse. În adevăr, prin două puncte A, B de pe sferă şi prin centrul O trece un plan unic dacă punctele A, O şi B nu sînt coliniare. Intersecţia acestui plan cu sfera determină cercul mare ce trece prin A şi B (fig.1.1).

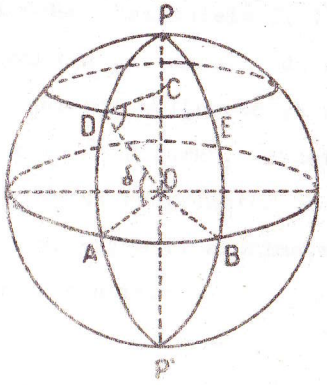

Fig.1.1. Cercuri pe sferă.

Diametrul sferei perpendicular pe planul unui cerc intersectează suprafaţa sferei în două puncte numite polii cercului.

Două cercuri mari de pe aceeaşi sferă se intersectează întotdeauna în două puncte diametral opuse.

Unghiul format de două arce de pe sferă, care se intersectează într-un punct, este, prin definiţie, unghiul ($\leq 180^\circ$) format de tangentele duse la cele două arce în punctul lor de intersecţie. În particular, măsura unghiului sferic APB (fig. 1.1) este egală cu:

- măsura unghiului diedru al planelor PAP' şi PBP';
- măsura arcului AB de pe cercul mare ai cărui poli sînt P şi P'.

Măsura unui arc de cerc mic de pe sferă se poate exprima cu ajutorul măsurii arcului de cerc mare. Pentru a arăta acest lucru, să considerăm cercul mic cu centrul în C şi care are planul paralel cu planul cercului AB cu centrul în O. Cercurile mari PAP' şi PBP' determină pe cercul mic arcul DE. Avem:

$$\left.\begin{aligned} \text{măs}(\widehat{DE}) &= CD \cdot \text{măs}(\widehat{DCE}) \\ \text{măs}(\widehat{AB}) &= OA \cdot \text{măs}(\widehat{AOB}) \\ \text{măs}(\widehat{DCE}) &= \text{măs}(\widehat{AOB}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{măs}(\widehat{DE})/\text{măs}(\widehat{AB}) = \frac{CD}{OA} = \frac{CD}{OD} = \cos\delta$$

şi atunci putem scrie:

$$\text{măs}(\widehat{DE}) = \text{măs}(\widehat{AB}) \cdot \cos\delta \qquad (1.1)$$

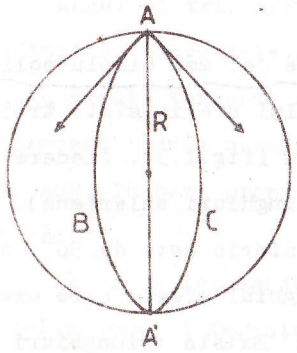

Fig.1.2. Fusul sferic.

Fusul sferic este figura de pe sferă formată din două semicercuri mari ale căror extremităţi coincid cu extremităţile diametrului lor comun (fig. 1.2). Elementele fusului sferic sînt:

- două laturi, ABA' şi ACA', de 180° fiecare;

- două unghiuri congruente, $\hat{A}$ şi $\hat{A}'$.

Dată fiind măsura unghiului A al fusului sferic de pe sfera de rază R, se poate determina aria fusului, utilizînd regula de trei simplă, şi anume: la unghiul cu măsura 2π corespunde aria $4\pi R^2$, iar la măs($\hat{A}$) corespunde aria S_A; rezultă:

$$S_A = (4\pi R^2/(2\pi)) \cdot \text{măs}(\hat{A}) = 2R^2 \text{măs}(\hat{A}), \qquad (1.2)$$

care exprimă faptul că aria fusului sferic este proporţională cu măsura unghiului său.

Poligonul sferic este figura de pe sferă mărginită de arce de cerc mare (laturile poligonului) mai mici de 180° şi limitate de intersecţiile lor consecutive.

Un poligon sferic se numeşte convex dacă este situat de aceeaşi parte în raport cu fiecare din cercurile mari cărora le aparţin laturile sale. În caz contrar, poligonul se numeşte concav.

1.2. Ce este triunghiul sferic ?

Răspuns: Triunghiul sferic este cel mai simplu poligon sferic convex. Elementele triunghiului sferic sînt: trei laturi a, b, c şi trei unghiuri A, B, C (fig.1.3), fiecare din acestea fiind mai mici de 180° (triunghiuri euleriene).

Dacă un unghi al triunghiului sferic este de 90°, triunghiul se numeşte dreptunghic. Triunghiul sferic care are o latură de 90° se numeşte rectilater. Există triunghiuri sferice tridreptunghice şi trirectilatere (exemplu: triunghiul format de ecuator şi două meridiane perpendiculare între ele).

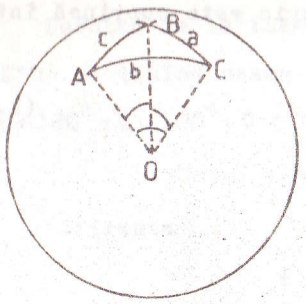

Fig.1.3. Triunghiul sferic.

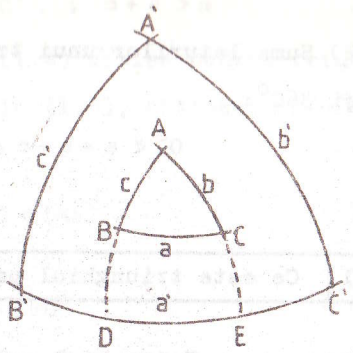

Fig.1.4. Triunghiul polar al unui triunghi sferic dat.

Unind vîrfurile A, B, C ale triunghiului sferic ABC cu centrul O al sferei de rază R, se obţine triedrul OABC corespunzător triunghiului sferic ABC.

Între feţele triedrului şi laturile triunghiului sferic există relaţiile:

$$\text{măs}(\widehat{AOB}) = \text{măs}(\hat{c}),$$
$$\text{măs}(\widehat{BOC}) = \text{măs}(\hat{a}),$$
$$\text{măs}(\widehat{AOC}) = \text{măs}(\hat{b}).$$

Un unghi al triunghiului sferic, de exemplu cel din A, este definit de tangentele duse în A la arcele de cerc AB şi AC. Deoarece aceste tangente sînt perpendiculare pe OA, rezultă că ele formează tocmai unghiul plan al diedrului definit de feţele AOC şi AOB. În baza proprietăţilor generale ale triedrului, deducem că:

1) O latură a triunghiului sferic este mai mică decît suma celorlalte două; diferenţa a două laturi este mai mică decît latura a treia:

$$a < b + c \; ; \qquad a - b < c \, . \tag{1.3}$$

2) Suma laturilor unui triunghi sferic este cuprinsă între 0° şi 360°:

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ \, . \tag{1.4}$$

1.3 Ce este triunghiul polar?

Răspuns: Triunghiul polar al unui triunghi sferic dat ABC este triunghiul sferic A'B'C' ale cărui laturi au ca poli vîrfurile triunghiului dat (fig.1.4). Vîrfurile A, B, C sînt, respectiv, polii laturilor B'C', A'C', B'A'. Laturile triunghiului polar sînt suplemente ale unghiurilor corespunzătoare ale triunghiului dat şi viceversa. Pentru justificarea acestei afirmaţii, observăm (fig.1.4) că:

$$a' = B'E + EC' = B'E + DC' - DE = 90^\circ + 90^\circ - A = 180^\circ - A \, . \tag{1.5}$$

În mod analog se obţine $b' = 180^\circ - B$ şi $c' = 180^\circ - C$.

Deoarece triunghiul polar al triunghiului sferic A'B'C' este triunghiul ABC, avem:

$$\left.\begin{aligned} a &= 180^\circ - A' \\ b &= 180^\circ - B' \\ c &= 180^\circ - C' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} A' &= 180^\circ - a \\ B' &= 180^\circ - b \\ C' &= 180^\circ - c \, . \end{aligned}\right. \tag{1.6}$$

Din relaţiile (1.5) şi (1.6) rezultă că dacă triunghiul dat este dreptunghic, atunci triunghiul său polar este rectilater şi invers.

Pornind de la inegalitatea (1.3) scrisă pentru triunghiul sferic A'B'C': $a' < b' + c'$ şi ţinînd seama de relaţiile de tipul (1.5), se obţine $180^\circ - A < 180^\circ - B + 180^\circ - C$, sau:

$$B + C < A + 180^\circ \, . \tag{1.7}$$

Pornind de la inegalităţile (1.4) scrise pentru triunghiul A'B'C' şi ţinînd seama de relaţiile (1.5), obţinem: $0^\circ < 180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ$, sau:

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ \, . \tag{1.8}$$

Diferenţa:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ \tag{1.9}$$

se numeşte exces sferic şi este o proprietate caracteristică a triunghiului sferic. Într-adevăr, $A + B + C = 180^\circ + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0^\circ)$, adică suma unghiurilor triunghiului sferic ABC este mai mare decît 180°.

1.4 Să se deducă formula pentru aria triunghiului sferic ABC.

Rezolvare: Aria triunghiului sferic ABC de pe sfera de rază R (fig.1.5) se poate deduce uşor, dacă observăm că suma ariilor celor trei fuse sferice (AA', BB', CC') care au drept unghiuri unghiurile triunghiului sferic dat acoperă emisfera vizibilă a sferei plus de două ori aria S_{ABC} a triunghiului sferic dat. Ţinînd seama şi de faptul că aria

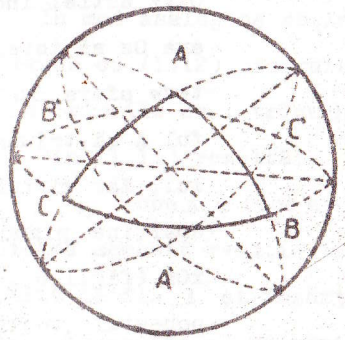

Fig.1.5. Pentru determinarea ariei triunghiului sferic.

fusului sferic este dată de (1.2), rezultă:

$$2R^2 măs(\hat{A}) + 2R^2 măs(\hat{B}) + 2R^2 măs(\hat{C}) - 2S_{ABC} = 2\pi R^2 ,$$

sau: $R^2(măs(\hat{A}) + măs(\hat{B}) + măs(\hat{C}) - \pi) = S_{ABC}$, de unde, utilizînd notaţia (1.9), se obţine:

$$S_{ABC} = \varepsilon R^2 \quad \text{sau} \quad S_{ABC} = (\pi R^2/180^\circ)\varepsilon . \qquad (1.10)$$

Dacă R = 1, rezultă că $\varepsilon = S_{ABC}$.

1.5 Să se deducă formulele ce exprimă teoremele cosinusului, sinusului şi formula celor cinci elemente referitoare la laturile triunghiului sferic ABC (formulele lui Gauss).

Rezolvare: Se consideră triunghiul sferic ABC de pe sfera cu centrul în O şi de rază unitate (R = 1). Alegem sistemul trirectangular de referinţă Oxyz astfel încît axa Oz să intersecteze sfera în vîrful A al triunghiului, iar vîrful B să aparţină planului xOz (fig.1.6). Componentele vectorilor de poziţie ai vîrfurilor triunghiului sînt: $\vec{e}_1(0, 0, 1)$; $\vec{e}_2(\sin c, 0, \cos c)$; $\vec{e}_3(\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$.

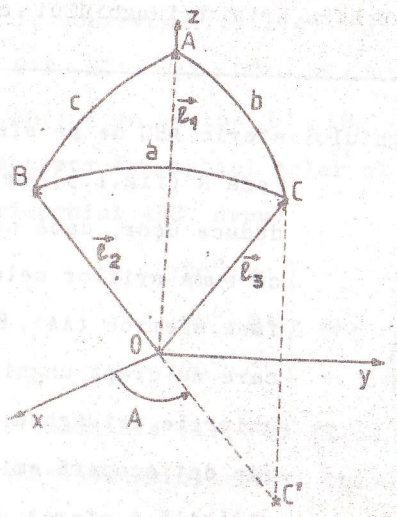

Fig.1.6. Pentru deducerea formulelor de bază ale trigonometriei sferice.

Făcînd produsul scalar al vectorilor unitari $\vec{e}_2$ şi $\vec{e}_3$, obţinem:

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \|\vec{e}_2\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A ,$$

sau:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A . \qquad (1.11)$$

În mod analog se obţin şi formulele:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B , \qquad (1.11')$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C . \qquad (1.11'')$$

Aceste formule reprezintă teorema cosinusului referitoare la laturile triunghiului sferic ABC.

Înmulţind (1.11) cu cos c şi adunînd membru cu membru la relaţia (1.11'), efectuînd reducerile şi împărţind prin sin c relaţia rezultată, se obţine:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A . \qquad (1.12)$$

În mod analog se obţin încă două relaţii ce reprezintă, împreună cu (1.12), formulele celor cinci elemente referitoare la laturile unui triunghi sferic ABC.

Din (1.11) rezultă:

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c)/(\sin b \sin c) .$$

Ridicînd această relaţie la pătrat, scăzînd fiecare membru al egalităţii din 1 şi împărţind prin $\sin^2 a$ fiecare membru al relaţiei rezultate, se obţine:

$$\sin^2 A/\sin^2 a = (1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)/(\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c) .$$

Avînd în vedere faptul că membrul din dreapta al acestei rela-

ţii este o funcţie simetrică în raport cu a, b, c, rezultă că:

$$\sin A/\sin a = \sin B/\sin b = \sin C/\sin c\,. \qquad (1.13)$$

Aceste formule reprezintă teorema sinusului referitoare la laturile unui triunghi sferic ABC.

Relaţiile:

$$\begin{aligned} &\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A\,,\\ &\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A\,,\\ &\sin a\sin B = \sin b\sin A \end{aligned} \qquad (1.14)$$

constituie formulele fundamentale ale trigonometriei sferice şi poartă numele de formulele lui Gauss.

Prin permutarea circulară a literelor din (1.14) se obţin trei grupe de relaţii fundamentale:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A\,,\\ &\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B\,,\\ &\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C\,; \end{aligned}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} &\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A\,,\\ &\sin a\cos C = \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A\,,\\ &\sin b\cos C = \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B\,,\\ &\sin b\cos A = \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B\,,\\ &\sin c\cos A = \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C\,,\\ &\sin c\cos B = \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C\,; \end{aligned}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} &\sin a\sin B = \sin b\sin A\,,\\ &\sin b\sin C = \sin c\sin B\,,\\ &\sin c\sin A = \sin a\sin C\,. \end{aligned}$$

Prin introducerea elementelor auxiliare m şi M, date de relaţiile:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} b\cos A\,,\\ &m = \cos b/\cos M = \sin b\cos A/\sin M \end{aligned} \qquad (1.15)$$

(deduse din notaţiile: $\cos b = m\cos M$ şi $\sin b\cos A = m\sin M$), primele două formule din (1.14) se transformă în două expresii calculabile prin logaritmi, şi anume:

$$\begin{aligned} &\cos a = m\cos(c - M)\,,\\ &\sin a\cos B = m\sin(c - M)\,. \end{aligned} \qquad (1.16)$$

1.6 Să se deducă formulele lui Gauss referitoare la unghiurile triunghiului sferic ABC.

Rezolvare: Scriind formulele lui Gauss (1.14) pentru triunghiul polar A'B'C' al triunghiului ABC şi ţinînd seama de relaţiile (1.5) şi (1.6), se obţine:

$$\begin{aligned} &\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a\,,\\ &\sin A\cos b = \cos B\sin C + \cos C\sin B\cos a\,,\\ &\sin A\sin b = \sin a\sin B\,, \end{aligned} \qquad (1.17)$$

adică formulele lui Gauss referitoare la unghiurile triunghiului sferic ABC.

Observaţie: Formulele lui Gauss pot fi deduse şi prin alte metode ca: metoda rotaţiei axelor de coordonate, metoda matricială, metoda vectorială etc.

1.7 Să se particularizeze formulele lui Gauss pentru triunghiul sferic dreptunghic ($A = 90^\circ$).

Răspuns: $\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$,

$\sin b = \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C$,

$\sin c = \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B$,

$\cos B = \cos b \sin C = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} a$,

$\cos C = \cos c \sin B = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a$.

1.8 Să se particularizeze formulele lui Gauss pentru triunghiul sferic rectilater ($a = 90^\circ$).

Răspuns: $\cos A = -\cos B \cos C = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$,

$\sin B = \sin A \sin b = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} c$,

$\sin C = \sin A \sin c = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} b$,

$\cos b = \cos B \sin c = -\operatorname{tg} C \operatorname{ctg} A$,

$\cos c = \cos C \sin b = -\operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A$.

1.9 Să se deducă formulele pentru $\cos(A/2)$, $\sin(A/2)$, $\cos((A-B)/2)$, $\sin((A-B)/2)$, $\cos((A+B)/2)$, $\sin((A+B)/2)$ în funcţie de laturi, folosind notaţia $a+b+c=2p$ (formulele lui Delambre).

Rezolvare: Din formula cosinusului deducem uşor:

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c)/(\sin b \sin c).$$

Făcînd combinaţiile $1+\cos A = 2\cos^2(A/2)$ şi analog $1-\cos A = 2\sin^2(A/2)$, obţinem pe $A/2$ cu ajutorul formulei:

$$1+\cos A = (\cos a - \cos(b+c))/(\sin b \sin c) = 2\sin p \sin(p-a)/(\sin b \sin c),$$

unde am introdus notaţia $a+b+c=2p$.

Atunci obţinem imediat:

$$\cos(A/2) = +\sqrt{\sin p \sin(p-a)/(\sin b \sin c)}, \qquad (1.18)$$

deoarece $A < 180^\circ$ implică $A/2 < 90^\circ$ şi $\cos(A/2) > 0$.

În mod analog se obţine formula:

$$\sin(A/2) = +\sqrt{\sin(p-b)\sin(p-c)/(\sin b \sin c)} \qquad (1.19)$$

şi, prin permutări circulare, formule analoge pentru unghiurile $B/2$ şi $C/2$.

Din formulele (1.18), (1.19) şi din formulele similare pentru celelalte unghiuri se deduce uşor:

$$\cos(A/2)\cos(B/2) = (\sin p/\sin c)\sin(C/2),$$

$$\sin(A/2)\sin(B/2) = (\sin(p-c)/\sin c)\sin(C/2),$$

de unde, adunînd membru cu membru şi ţinînd seama de faptul că $2p = a+b+c$, obţinem:

$$\cos((A-B)/2) = (\sin((a+b)/2)/\sin(c/2))\sin(C/2). \qquad (1.20)$$

Formulele pentru $\cos((A+B)/2)$, $\sin((A-B)/2)$ şi $\sin((A+B)/2)$ se obţin în mod analog. Acestea reprezintă formulele lui Delambre, care se scriu de regulă sub forma:

$$\begin{aligned} &\cos((A-B)/2)/\sin(C/2) = \sin((a+b)/2)/\sin(c/2), \\ &\cos((A+B)/2)/\sin(C/2) = \cos((a+b)/2)/\cos(c/2), \\ &\sin((A-B)/2)/\cos(C/2) = \sin((a-b)/2)/\sin(c/2), \\ &\sin((A+B)/2)/\cos(C/2) = \cos((a-b)/2)/\cos(c/2). \end{aligned} \qquad (1.21)$$

1.10 Să se deducă formulele pentru $\operatorname{tg}((A-B)/2)/\operatorname{ctg}(C/2)$, $\operatorname{tg}((A+B)/2)/\operatorname{tg}(C/2)$ în funcţie de laturi şi formulele pentru $\operatorname{tg}((a-b)/2)/\operatorname{tg}(c/2)$, $\operatorname{tg}((a+b)/2)/\operatorname{tg}(c/2)$ în

funcţie de unghiuri (formulele lui Neper).

Rezolvare: Din formulele lui Delambre (1.21), prin împărţire, obţinem:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}((A-B)/2)/\operatorname{ctg}(C/2) &= \sin((a-b)/2)/\sin((a+b)/2)\,, \\ \operatorname{tg}((A+B)/2)/\operatorname{tg}(C/2) &= \cos((a-b)/2)/\cos((a+b)/2)\,, \\ \operatorname{tg}((a-b)/2)/\operatorname{tg}(c/2) &= \sin((A-B)/2)/\sin((A+B)/2)\,, \\ \operatorname{tg}((a+b)/2)/\operatorname{tg}(c/2) &= \cos((A-B)/2)/\cos((A+B)/2)\,, \end{aligned} \tag{1.22}$$

care sînt formulele (sau analogiile) lui Neper (sau Napier).

1.11 Să se exprime excesul sferic ε în funcţie de laturile triunghiului sferic (formula lui L'Huillier).

Rezolvare: Vom considera şi utiliza următoarea formulă din trigonometria plană:

$$\operatorname{tg}((x-y)/2) = (\sin x - \sin y)/(\cos x + \cos y)\,.$$

Deoarece avem:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon/4) = \operatorname{tg}((A+B+C-\pi)/4) = \operatorname{tg}(((A+B)/2 - (\pi-C)/2)/2)\,,$$

pentru $x = (A+B)/2$ şi $y = (\pi-C)/2$, rezultă uşor:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon/4) = (\sin((A+B)/2) - \cos(C/2))/(\cos((A+B)/2) + \sin(C/2))\,.$$

Înlocuind în această relaţie $\sin((A+B)/2)$ şi $\cos((A+B)/2)$ prin expresiile date de formulele lui Delambre (1.21), obţinem după calcule simple:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon/4) = (2\sin((a-b+c)/4)\sin((c-a+b)/4)/(2\cos((a+b+c)/4)\cos((a+b-c)/4)))(1/\operatorname{tg}(C/2))\,.$$

Exprimînd $\operatorname{tg}(C/2)$ cu ajutorul formulei corespunzătoare ce se obţine din (1.18) şi (1.19), relaţia de mai sus devine:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon/4) = (\sin((p-a)/2)\sin((p-b)/2)/(\cos(p/2)\cos((p-c)/2)))\cdot \sqrt{\sin p \sin(p-c)/(\sin(p-a)\sin(p-b))}\,.$$

Ridicînd la pătrat şi folosind formula din trigonometria plană $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$, rezultă:

$$\operatorname{tg}^2(\varepsilon/4) = \operatorname{tg}(p/2)\operatorname{tg}((p-a)/2)\operatorname{tg}((p-b)/2)\operatorname{tg}((p-c)/2)\,, \tag{1.23}$$

care este formula lui L'Huillier.

1.12 Să se arate că în cazul limită, cînd $R \to \infty$ şi triunghiul sferic se apropie de un triunghi plan, teoremele sinusului şi cosinusului ale trigonometriei sferice se transformă în teoremele corespunzătoare din trigonometria plană, iar din formula lui L'Huillier rezultă formula lui Heron din trigonometria plană.

Rezolvare: Să considerăm trei puncte din spaţiu ce nu sînt coliniare, A, B, C. Ele determină un plan şi, în acest plan, un triunghi. În acelaşi timp, există o infinitate de sfere pe a căror suprafaţă se găsesc cele trei puncte. Dacă aceste sfere sînt ordonate după mărimea razelor, atunci cînd $R \to \infty$ curburile respective descresc şi triunghiul sferic se apropie de un triunghi plan; unghiurile de pe sferă se apropie de unghiuri plane obişnuite şi excesul sferic $\hat{\varepsilon}$ devine oricît de mic. Lungimile laturilor triunghiului plan, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ au drept corespondente în triunghiul sferic arcele $\bar{a}/R$, $\bar{b}/R$, $\bar{c}/R$, măsurate în unităţi de arc.

Din dezvoltarea funcţiilor trigonometrice sinus şi cosinus în serii convergente, notînd $\bar{a}/R = q_a$, $\bar{b}/R = q_b$, $\bar{c}/R = q_c$ şi prin δ_i - mărimile ce tind la 0 odată cu $1/R^4$, se obţine:

$$\sin q_a = q_a - q_a^3/3! + \ldots = q_a(1 - q_a^2/6 + \delta_1) ,$$

$$\cos q_a = 1 - q_a^2/2 + \delta_2 .$$

Din teorema sinusurilor din trigonometria sferică rezultă:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \bar{a}(1 - q_a^2/6 + \delta_1) : \bar{b}(1 - q_b^2/6 + \delta_3) : \bar{c}(1 - q_c^2/6 + \delta_5)$$

şi la limită se obţine:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c} , \qquad (1.24)$$

adică teorema sinusurilor din trigonometria plană.

Din teorema cosinusurilor din trigonometria sferică se obţine:

$$1 - q_a^2/2 + \delta_2 = (1 - q_b^2/2 + \delta_4)(1 - q_c^2/2 + \delta_6) + q_b q_c(1 - q_b^2/6 + \delta_3)(1 - q_c^2/6 + \delta_5)\cos\alpha ,$$

de unde:

$$-q_a^2/2 + \delta_2 = -(q_b^2 + q_c^2)/2 - \delta_{4,6} + q_b q_c(1 - (q_b^2 + q_c^2)/6 + \delta_{3,5})\cos\alpha$$

şi la limită se obţine:

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c}\cos\alpha , \qquad (1.25)$$

adică teorema cosinusurilor din trigonometria plană.

Dacă în formula lui L'Huillier (1.23) funcţiile tangentă se înlocuiesc cu arcele unghiurilor, acestea din urmă fiind foarte mici, obţinem formula aproximativă:

$$\hat{\varepsilon}/4 = (1/4)\sqrt{(\bar{p}/R)((\bar{p}-\bar{a})/R)((\bar{p}-\bar{b})/R)((\bar{p}-\bar{c})/R)} .$$

Utilizînd expresia de mai sus şi ţinînd seama de expresia S_{ABC} (1.10) pentru aria unui triunghi sferic, se obţine formula lui Heron pentru triunghiul plan:

$$S_{ABC} = \hat{\varepsilon} R^2 = (\varepsilon/4)\cdot 4R^2 = \sqrt{\bar{p}(\bar{p}-\bar{a})(\bar{p}-\bar{b})(\bar{p}-\bar{c})} . \qquad (1.26)$$

1.13 Să se arate că într-un triunghi sferic echilateral există relaţia: $\cos a = \cos A/(1 - \cos A)$.

Rezolvare: Din ipoteză rezultă $a = b = c$. În aceste condiţii, prima formulă a lui Gauss (1.14) devine:

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos A ,$$

din care deducem succesiv:

$$\cos a(1 - \cos a) = (1 - \cos^2 a)\cos A ,$$

$$\cos a = (1 + \cos a)\cos A ,$$

$$\cos a(1 - \cos A) = \cos A .$$

De aici rezultă relaţia căutată.

1.14 Să se determine aria triunghiului sferic echilateral care are unghiurile de 75°.

Rezolvare: Din ipoteză avem $A = B = C = 75^\circ = 5\pi/12$. Excesul sferic este $\varepsilon = A + B + C - \pi = 3 \cdot 5\pi/12 - \pi = \pi/4$.

Aplicînd formula (1.10), găsim aria triunghiului:

$$S_{ABC} = \varepsilon R^2 = \pi R^2/4 .$$

1.15 Ştiind că aria unui triunghi sferic dreptunghic isoscel este o treime din aria unui cerc mare al sferei, să se calculeze unghiurile triunghiului.

Rezolvare: Conform ipotezei, avem $A = 90^\circ$, $B = C$. Aria

triunghiului sferic este atunci:

$$S_{ABC} = R^2(\pi/2 + B + B - \pi) = R^2(2B - \pi/2) .$$

Dar din ipoteză rezultă că această arie este egală cu $\pi R^2/3$. Atunci putem scrie că $R^2(2B - \pi/2) = \pi R^2/3$, de unde rezultă:

$$B = (\pi/3 + \pi/2)/2 = 5\pi/12 ,$$

sau, în grade, $B = C = 75^\circ$.

1.16 Să se determine lungimea laturii unui triunghi sferic aşezat pe o sferă cu raza $R = 5$ m, ştiind că $a = 32^\circ 17' 15"$.

Rezolvare: Calculăm a în secunde de arc (a"):

$$32^\circ = 32 \cdot 3600" = 115\,200"$$
$$17' = 17 \cdot 60" = 1020"$$
$$15" = 15"$$
$$a" = 116\,235"$$

Dacă R este raza unui cerc şi α numărul de radiani al unui arc de pe acel cerc, atunci lungimea arcului este:

$$\ell = R\alpha . \qquad (1.27)$$

Să calculăm numărul de radiani al unui arc de 1", număr pe care-l notăm cu ω. Ştiind că unui arc de 180° (= 648 000") îi corespund π radiani, prin regula de trei simplă găsim:

$$\omega = \pi/648\,000 = 3{,}14159/648\,000 = 1/206\,265 \text{ rad.}$$

Atunci, din (1.27), unde $\alpha = a"\omega$, calculăm imediat lungimea laturii a:

$$\ell_a = R\,a"\omega = 5 \cdot 116\,235 \cdot (1/206\,265) \cong 2{,}817 \text{ m} .$$

C A P I T O L U L I I

ASTRONOMIA SFERICĂ

2.1 Enumeraţi punctele fundamentale de referinţă de pe sfera cerească.

R ă s p u n s : Polul nord al lumii (P), polul sud al lumii (P'); zenitul (Z), nadirul (Z'); punctul cardinal sud (S), punctul cardinal nord (N), punctul cardinal est (E), punctul cardinal vest (V); polul nord ecliptic (Π), polul sud ecliptic (Π'); punctul vernal (Υ = punctul echinocţiului de primăvară), punctul autumnal (Ω = punctul echinocţiului de toamnă), punctul solstiţiului de vară ($\mathfrak{S} = \mathfrak{Cp}$), punctul solstiţiului de iarnă ($\mathfrak{S}' = \mathfrak{Z}$); polul nord galactic (G), polul sud galactic (G'), nodul ascendent al ecuatorului galactic (Ω), nodul descendent al ecuatorului galactic (Ω').

2.2 Să se scrie coordonatele ecuatoriale ale punctelor fundamentale de referinţă de pe sfera cerească.

R e z o l v a r e : Conform figurilor 2.1, 2.2 şi 2.3, avem:

(Z) $\alpha = \widehat{\Upsilon Q} = \theta$,
$\delta = \widehat{QZ} = \varphi$;

($\mathbb{Z}'$) $\alpha = \widehat{\Upsilon QQ'} = \theta + 12^h$,
$\delta = \widehat{Q'Z'} = -\varphi$;

(S) $\alpha = \widehat{\Upsilon Q} = \theta$,
$\delta = \widehat{QS} = \widehat{QP'} - \widehat{SP'} = -(90^\circ - \varphi)$;

(N) $\alpha = \widehat{\Upsilon QQ'} = \theta + 12^h$,
$\delta = \widehat{Q'N} = \widehat{Q'P} - \widehat{NP} = 90^\circ - \varphi$;

(E) $\alpha = \widehat{\Upsilon QE} = \theta + 6^h$,
$\delta = 0^\circ$;

(V) $\alpha = \widehat{\Upsilon V} = \widehat{\Upsilon Q} - \widehat{VQ} = \theta - 6^h$,
$\delta = 0^\circ$;

(Π) $\alpha = \widehat{\Upsilon QQ'} = 270^\circ = 18^h$,
$\delta = \widehat{Q'\Pi} = \widehat{Q'P} - \widehat{\Pi P} = 90^\circ - \varepsilon = 90^\circ - 23^\circ 27' = 66^\circ 33'$;

(Π') $\alpha = \widehat{\Upsilon Q} = 90^\circ = 6^h$,
$\delta = \widehat{Q\Pi'} = \widehat{QP'} - \widehat{\Pi' P'} = -90^\circ - (-\varepsilon) = -90^\circ + 23^\circ 27' =$
$= -66^\circ 33'$;

(Υ) $\alpha = 0^h$,
$\delta = 0^\circ$;

($\underline{\Omega}$) $\alpha = \widehat{\Upsilon Q\,\underline{\Omega}} = 180^\circ = 12^h$,
$\delta = 0^\circ$;

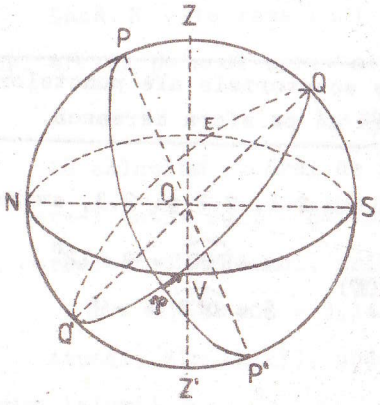

Fig.2.1. Punctele fundamentale Z, Z', S, N, E, V.

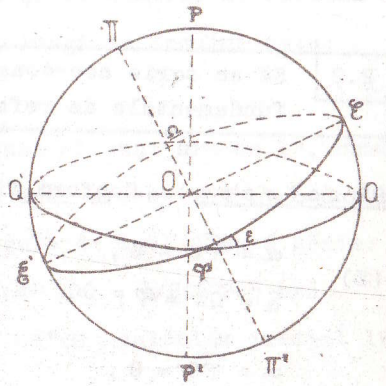

Fig.2.2. Punctele fundamentale Π, Π', Υ, $\underline{\Omega}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$.

($\mathscr{E}$) $\alpha = \widehat{\Upsilon Q} = 90^\circ = 6^h$,
$\delta = \widehat{Q\mathscr{E}} = \varepsilon = 23^\circ 27'$;

($\mathscr{E}'$) $\alpha = \widehat{\Upsilon QQ'} = 270^\circ = 18^h$,
$\delta = \widehat{Q'\mathscr{E}'} = -\varepsilon = -23^\circ 27'$;

(G) $\alpha = 12^h 40^m$,
$\delta = 28^\circ$;

(G') $\alpha = 0^h 40^m$,
$\delta = -28^\circ$;

(Ω) $\alpha = 18^h 40^m$,
$\delta = 0^\circ$;

(Ω') $\alpha = 6^h 40^m$,
$\delta = 0^\circ$.

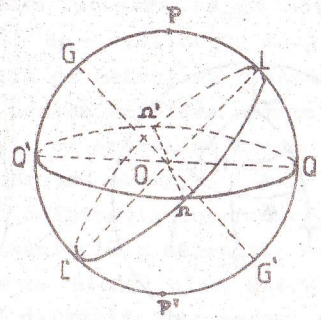

Fig.2.3. Punctele fundamentale G, G', Ω, Ω'.

2.3	Să se arate că relaţia: $\theta = \alpha + H$ are o valabilitate generală (nedepinzînd de situarea observatorului O pe globul terestru şi a astrului $\mathscr{E}$ pe sfera cerească.

Rezolvare : Se consideră cazurile posibile de situare a cercurilor de declinaţie ale punctelor Υ şi $\mathscr{E}$ faţă de meridianul ceresc al locului O.

Avem patru cazuri posibile (fig.2.4):

Cazul 1: $\theta = \alpha + H$;

Cazul 2: $\theta + 360^\circ - H = \alpha$,
$\theta = \alpha + H - 360^\circ$,
$\theta = \alpha + H - 24^h$;

Cazul 3: $\theta = \alpha + H - 360^{\circ}$, $\theta = \alpha + H - 24^{h}$;

Cazul 4: $H - \theta = 360^{\circ} - \alpha$, $\theta = \alpha + H - 360^{\circ}$, $\theta = \alpha + H - 24^{h}$.

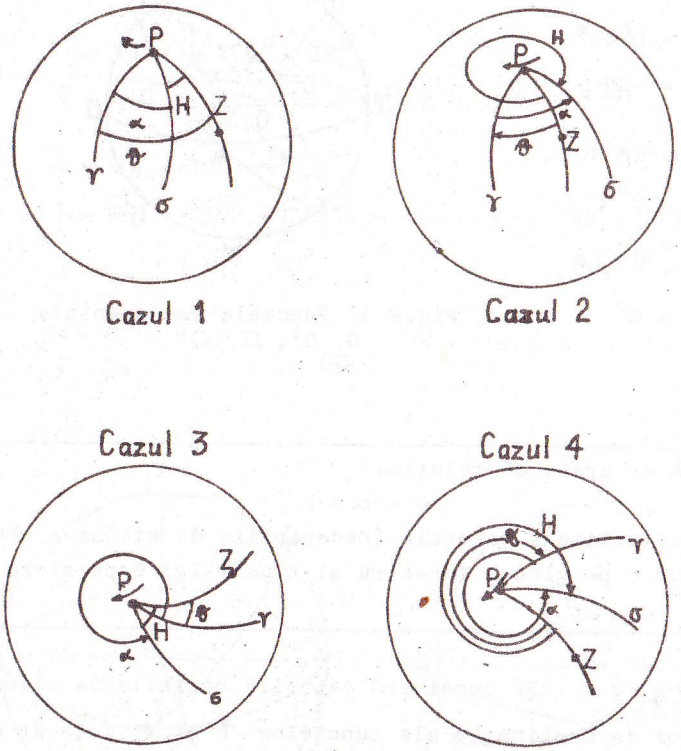

Fig.2.4. Pentru demonstrarea valabilităţii relaţiei $\theta = \alpha + H$.

2.4 Să se demonstreze, fără a recurge la noţiunea de sferă cerească, că, în cazul trecerii astrului la meridianul ceresc al locului de observaţie (O), au loc următoarele formule:

$\delta_N \geq 90^{\circ} - \varphi$	(condiţia necesară ca un astru să nu apună; δ_N - declinaţie nordică);
$\lvert\delta_S\rvert \geq 90^{\circ} - \varphi$	(condiţia necesară ca un astru să nu răsară; δ_S - declinaţie sudică);
$\delta_N = \varphi$	(condiţia ca astrul să treacă prin zenit - pentru emisfera nordică);
$\delta_S = \varphi$	(condiţia ca astrul să treacă prin zenit - pentru emisfera sudică);
$\pm z_m = \varphi - \delta$	(pentru culminaţia superioară; z_m - distanţa zenitală a astrului; semnul minus se ia atunci cînd astrul se află la sud de zenit, iar semnul plus - la nord de zenit);
$z_m = 180^{\circ} - (\varphi + \delta)$	(pentru culminaţia inferioară).

Indicaţii: Se consideră fig.2.5, unde am presupus că aştrii se află în spaţiu la distanţe foarte mari de Pămînt, încît ei pot fi consideraţi ficşi pentru timpul perioadei de rotaţie a Pămîntului. Am utilizat următoarele notaţii:

pp' - axa de rotaţie a Pămîntului (T - centrul Pămîntului);

qq' - ecuatorul Pămîntului, săgeata indicînd sensul rotaţiei terestre;

O - poziţia observatorului pe meridianul terestru pqp';

OZ - linia verticalei locului O;

NS - meridiana locului O (intersecţia orizontului matematic cu planul figurii);

OP - axa lumii;

QQ' - intersecţia planului ecuatorului ceresc cu planul figurii (OP ∥ pp', QQ' ∥ qq'); se vede că planul figurii este planul meridianului ceresc şi că planul meridianului ceresc coincide cu planul meridianului geografic;

O_1 - poziţia observatorului după o jumătate de perioadă de rotaţie a Pămîntului;

O_1Z_1 - linia verticalei locului O_1;

N_1S_1 - poziţia orizontului locului O_1;

O_1P - axa lumii;

Planul ecuatorului ceresc QQ' rămîne neschimbat.

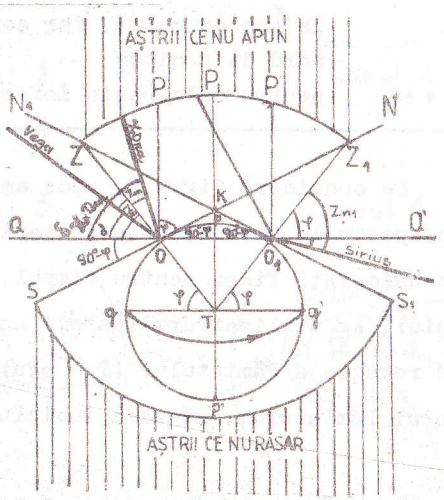

Fig.2.5. Pentru stabilirea condiţiilor de vizibilitate a aştrilor.

Planul orizontului observatorului descrie o suprafaţă conică, unghiul de la vîrf al conului de sus fiind $\widehat{NKN_1}$, iar

unghiul de la vîrf al conului de jos - $\widehat{SKS_1}$. Din fig.2.5 se vede că toţi aştrii care se află în conul de sus sînt întotdeauna deasupra orizontului (deci nu apun), iar aştrii care se află în conul de jos se află întotdeauna sub orizont (deci nu răsar niciodată pentru observatorul dat).

Pentru deducerea formulelor pentru distanţa zenitală în cazul trecerii la meridianul ceresc al locului, am indicat în fig.2.5 direcţiile către trei stele: Vega, Sirius şi χ Dra, care se află în spaţiu aproximativ în acelaşi plan (în fig. 2.5, exact în planul figurii).

2.5 Să se descrie fenomenele mişcării aparente a Soarelui pe sfera cerească, pentru următoarele latitudini geografice: $\varphi = 0^\circ$; $+23^\circ,5$; $+66^\circ,5$; $+90^\circ$ (din emisfera boreală). Cum se desfăşoară fenomenele similare pentru emisfera australă?

Rezolvare: Vom examina pe rînd cele patru cazuri menţionate în enunţ, în proiecţia sferei cereşti pe planul méridianului ceresc al locului de observaţie (O).

I. Cazul $\varphi = 0^\circ$ (ecuatorul) (fig.2.6)

Axa lumii (PP') coincide cu meridiana (NS): polul nord al lumii (P) coincide cu punctul cardinal nord (N), iar polul sud al lumii (P') coincide cu punctul cardinal sud (S); ecuatorul ceresc (QQ') este perpendicular pe orizont (NS), toţi paralelii cereşti sînt perpendiculari pe orizont şi sînt împărţiţi în cîte două părţi egale; drept urmare, drumurile tuturor aştrilor deasupra orizontului, respectiv dedesubtul orizontului, sînt egale. În cazul mişcării Soarelui: ziua este

întotdeauna egală cu noaptea, Soarele aflîndu-se de două ori, în zilele echinocţiilor, la miezul zilei, la zenitul observatorului (Z). Se poate întîmpla, însă, ca la 21 martie şi 23 septembrie centrul discului solar să nu se afle exact în zenit.

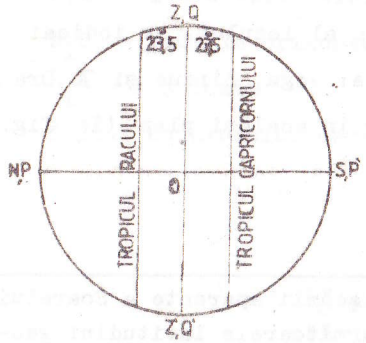

Fig.2.6. Pentru determinarea mişcării aparente a Soarelui corespunzînd unui loc situat pe ecuatorul terestru.

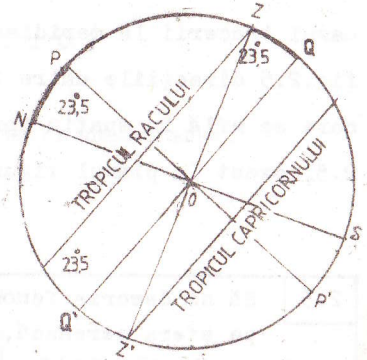

Fig.2.7. Pentru determinarea mişcării aparente a Soarelui corespunzînd unui loc situat pe unul din tropice.

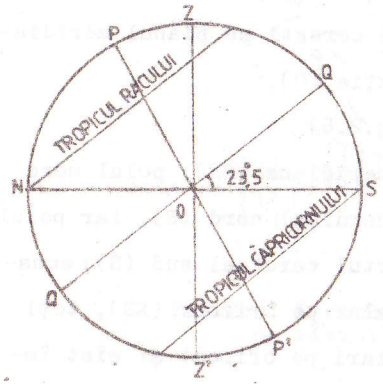

Fig.2.8. Pentru determinarea mişcării aparente a Soarelui corespunzînd unui loc situat pe unul din cercurile polare.

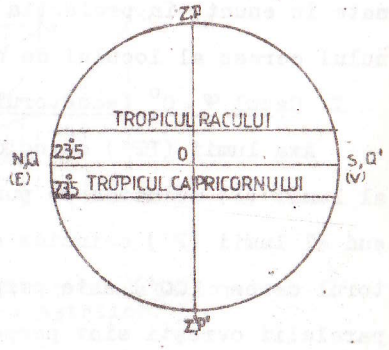

Fig.2.9. Pentru determinarea mişcării aparente a Soarelui corespunzînd unui loc situat într-unul din polii terestri.

II. Cazul $\varphi = 23^{\circ},5$ N (tropicul Racului) (fig.2.7)

Axa lumii este înclinată pe orizont cu $23^{\circ},5$ şi, drept urmare, ecuatorul ceresc (QQ') este înclinat pe linia verticală (ZZ') cu acelaşi unghi. De aici rezultă că tropicul Racului trece prin zenitul observatorului (Z), iar tropicul Capricornului - prin nadir (Z'). Dacă este vorba de Soare, acesta se află pe tropicul Racului o singură dată pe an, în ziua solstiţiului de vară; în această zi, la miezul zilei, Soarele se află la zenit (Z).

Dacă observatorul (O) se află la latitudini $\varphi > 23^{\circ},5$ (în emisfera boreală), atunci axa lumii (PP') se ridică deasupra orizontului, ecuatorul ceresc (QQ'), dimpotrivă, coboară spre orizont, iar tropicul Racului va trece la sud de zenit şi, ca urmare, Soarele, în mişcarea sa, nu va mai ajunge la zenit. Dimpotrivă, dacă $\varphi < 23^{\circ},5$ (în emisfera boreală), atunci axa lumii (PP') coboară spre orizont, ecuatorul ceresc se ridică deasupra orizontului şi tropicul Racului se va situa la nord de zenit şi, drept urmare, Soarele va trece de două ori prin zenit (Z) - o dată, între 21 martie şi 22 iunie, cînd acesta urcă spre tropicul Racului, iar a doua oară între 23 iunie şi 23 septembrie, cînd el coboară spre ecuatorul ceresc.

La latitudinea $\varphi = 23^{\circ},5$ S avem o situaţie analogă, cu deosebirea că Soarele se află la zenit în ziua de solstiţiu de iarnă, cînd el este pe tropicul Capricornului.

Din cele expuse mai sus, rezultă că tropicele terestre separă pe globul terestru zonele în care Soarele se află, măcar o singură dată pe an, la zenitul observatorului. Se poate

observa că tropicele au apărut mai întîi ca cercuri ale sferei cereşti, fapt care rezultă din însăşi denumirea lor de constelaţii; numai mai tîrziu au apărut denumirile de tropice terestre - paralele trasate pe globul pămîntesc, la distanţa de $23^{\circ},5$, pe ambele părţi ale ecuatorului terestru.

III. Cazul $\varphi = 66^{\circ},5\ N$ (cercul polar nord) (fig.2.8)

Ecuatorul ceresc este înclinat cu un unghi de $23^{\circ},5$ pe orizont. Prin urmare, tropicul Racului trece prin punctul cardinal nord (N), iar tropicul Capricornului - prin punctul cardinal sud (S).

Soarele, în ziua de 22 iunie, se află pe tropicul Racului, care este situat în întregime deasupra orizontului observatorului; înseamnă că astrul zilei, în aceeaşi zi, la cercul polar nord, nu apune.

Dimpotrivă, în ziua de 22 decembrie, Soarele se află pe tropicul Capricornului, care este situat în întregime sub orizont; prin urmare, în această zi Soarele nu răsare.

Dacă observatorul se deplasează puţin spre nord de cercul polar nord, tropicul Racului se ridică deasupra orizontului, iar Soarele nu apune timp de cîteva zile.

Dacă observatorul se deplasează puţin spre sud de cercul polar nord, atunci axa lumii (PP') coboară, tropicul Racului coboară sub orizont, iar tropicul Capricornului urcă deasupra orizontului. Prin urmare, Soarele nu va fi un astru care nu apune şi nu răsare.

Fenomene asemănătoare au loc la cercul polar sud, cu deosebirea că Soarele va fi un astru ce nu apune pe tropicul Capricornului şi nu răsare pe tropicul Racului.

Cercurile polare terestre separă acele zone pe globul terestru în care Soarele, cel puţin o zi pe an, nu apune.

IV. Cazul $\varphi = 90^{\circ}\ N$ (polul nord) (fig.2.9)

Axa lumii (PP') coincide cu verticala locului (O), în zenit aflîndu-se polul nord al lumii (P), iar ecuatorul ceresc (QQ') coincide cu orizontul. Paralelii cereşti diurni, care sînt paraleli cu ecuatorul, sînt paraleli şi cu orizontul observatorului (O). Planul meridianului ceresc este nedeterminat: toate meridianele geografice se întîlnesc într-un punct, iar punctele cardinale nord, sud, est şi vest nu există în cazul de faţă.

Soarele, în ziua echinocţiului de primăvară, va descrie chiar cercul orizontului, în ziua următoare descrie un cerc puţin deasupra orizontului, şi aşa mai departe, ridicîndu-se din ce în ce mai sus; în ziua solstiţiului de vară, Soarele descrie paralelul cel mai înalt deasupra orizontului - tropicul Racului. După această zi, Soarele începe să coboare către orizont, din ce în ce mai jos în fiecare zi; în ziua echinocţiului de toamnă el descrie din nou cercul orizontului. După echinocţiul de toamnă, Soarele coboară sub orizont.

Aşadar, la polul nord al Pămîntului ziua are o durată de o jumătate de an, iar noaptea durează, de asemenea, o jumătate de an.

La polul sud al Pămîntului, tot o jumătate de an durează ziua şi o jumătate de an noaptea, dar ziua durează de la data de 23 septembrie pînă la 21 martie - adică durata nopţii polare la polul nord al Pămîntului, iar noaptea durează de la

21 martie pînă la 23 septembrie - în timpul zilei polare de la polul nord.

Pentru recapitulare, în tabelul următor vom înscrie înălţimile Soarelui la amiază, la începutul anotimpurilor, pentru diferite latitudini geografice.

Tabelul 2.1

Locul	φ	21.III	22.VI	23.IX	22.XII
Polul nord	90°	0° de S	23°,5 de S	0° de S	-23°,5 de S
Cercul polar nord	66°,5	23°,5 de S	47° de S	23°,5 de S	0° de S
Tropicul Racului	23°,5	66°,5 de S	90°	66°,5 de S	43° de S
Ecuatorul	0°	90°	66°,5 de N	90°	66°,5 de S
Tropicul Capricornului	-23°,5	66°,5	43° de N	66°,5 de N	90°
Cercul polar sud	-66°,5	23°,5	0°	23°,5	47°
Polul sud	-90°	0°	-23°,5	0°	23°,5

2.6 Să se explice succesiunea anotimpurilor prin mişcarea Pământului în jurul Soarelui.

Răspuns: În fig.2.10 sînt reprezentate poziţiile Pământului în zilele de echinocţii şi de solstiţii, în ipoteza mişcării Pământului (a centrului său de masă) în jurul Soarelui pe un cerc; aici orbita Pământului este considerată ca şi cum axa de rotaţie a lui s-ar deplasa paralel cu sine în-

săşi (neglijîndu-se micile deplasări datorate precesiei, cap. IV), fiind înclinată faţă de planul orbitei terestre (ecliptica) cu un unghi de 66°33'.

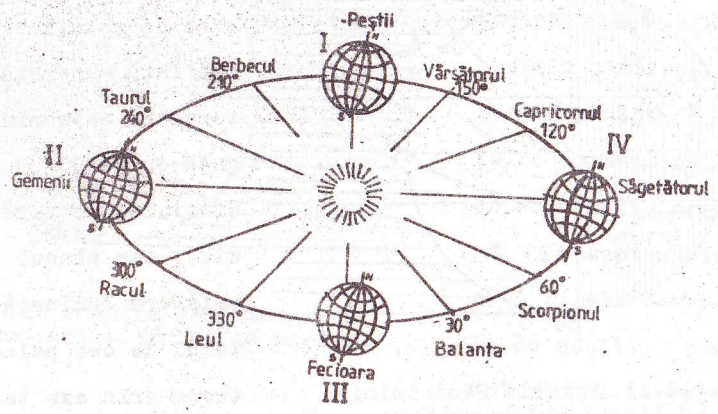

Fig.2.10. Poziţiile Pământului la începutul anotimpurilor.

În poziţia I (fig.2.10 şi 2.11), axa de rotaţie a Pământului este perpendiculară pe raza orbitei terestre şi planul ce separă emisfera luminată a Pământului de cea neluminată trece prin axa terestră. Ca urmare, în cursul rotaţiei Pământului în jurul axei sale, fiecare punct terestru se află o jumătate de zi în zona luminată şi o jumătate de zi în zona de umbră, adică pe tot globul terestru ziua este egală cu noaptea. Această poziţie a Pământului, care corespunde zilei de echinocţiu de primăvară (21 martie), este reprezentată în fig.2.11, unde pp' (‖ PP') - axa de rotaţie a Pământului,

qq' (∥ QQ') - ecuatorul terestru, liniile orizontale reprezentînd razele Soarelui. Se vede că, pentru un observator situat la ecuator, Soarele este văzut la zenit, iar în punctul O, de latitudine nordică φ, înălţimea Soarelui deasupra orizontului la meridian este: $h_{m\odot} = 90^\circ - \varphi$.

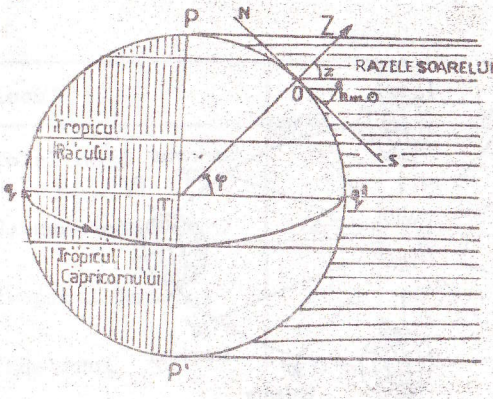

Fig.2.11. Poziţia Pămîntului în timpul echinocţiilor.

În poziţia II (fig. 2.10 şi 2.12), înclinarea axei de rotaţie a Pămîntului faţă de raza orbitei terestre este minimă şi egală cu 66°33' în ziua solstiţiului de vară (22 iunie), iar planul ce separă emisfera luminată a Pămîntului de cea neluminată nu trece prin axa terestră. Ca urmare, în cursul rotaţiei Pămîntului în jurul axei sale, în emisfera nordică zilele sînt mai lungi decît nopţile; după cercul polar de nord Soarele nu apune, iar după cel de sud - nu răsare. Se vede, de asemenea, că Soarele se află la zenit pe tropicul Racului, iar în punctul O, de latitudine nordică φ, înălţimea Soarelui la meridian este $h_{m\odot} = (90^\circ - \varphi) + 23^\circ 27'$ şi aceasta este cea mai mare înălţime posibilă a Soarelui deasupra orizontului locului de observaţie considerat.

Se vede deci că în cursul mişcării Pămîntului în jurul Soarelui din poziţia I în poziţia II emisfera nordică a Pămîntului este avantajată faţă de cea sudică, în sensul ilu-

minării ei de către Soare, cel mai mare avantaj prezentîndu-se în ziua solstiţiului de vară.

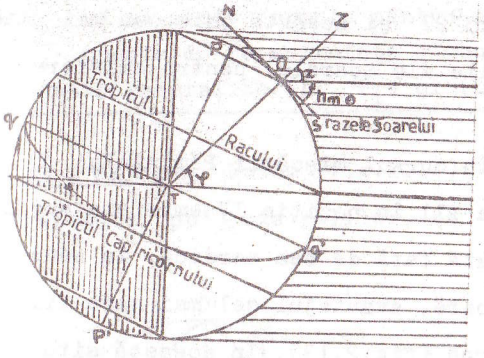

Fig.2.12. Poziţia Pămîntului în timpul solstiţiului de vară.

În poziţia III (fig.2.10 şi 2.11), emisferele nordică şi sudică ocupă din nou poziţii similare şi această poziţie a Pămîntului corespunde zilei de echinocţiu de toamnă (23 septembrie), cînd zilele devin egale cu nopţile pentru tot globul terestru.

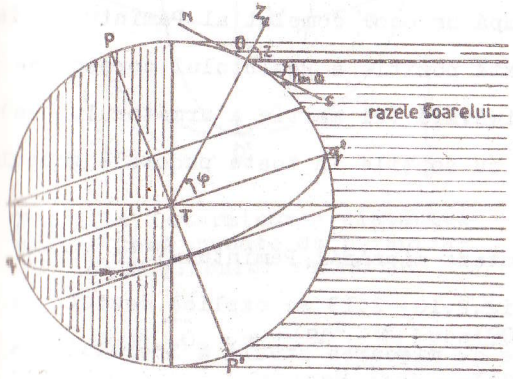

Fig.2.13. Poziţia Pămîntului în timpul solstiţiului de iarnă.

În poziţia IV (fig.2.10 şi 2.13), înclinarea axei de rotaţie a Pămîntului faţă de raza orbitei terestre este maximă şi egală cu 113°33', în ziua solstiţiului de iarnă (22 decembrie), iar planul ce separă emisfera luminată a Pămîntului de cea neluminată din nou nu trece prin axa Pămîntului. De aci rezultă că, în cursul rotaţiei Pămîntului în jurul axei sale, în emisfera nordică zilele sînt mai scurte decît nopţile

(invers faţă de poziţia II), iar în emisfera sudică - invers. După cercul polar de nord Soarele nu răsare, iar după cercul polar de sud - nu apune. Soarele se află la zenit pentru un observator situat pe tropicul Capricornului, iar în punctul O, de latitudine nordică φ, înălţimea Soarelui la meridian este: $h_{m\odot} = (90^\circ - \varphi) - 23^\circ 27'$ şi aceasta este cea mai mică dintre înălţimile posibile ale Soarelui pentru emisfera nordică.

Se vede, deci, că în cursul mişcării Pământului în jurul Soarelui din poziţia III în poziţia IV emisfera sudică a Pământului este avantajată faţă de cea nordică, în sensul iluminării ei de către Soare, avantajul cel mai mare fiind în ziua solstiţiului de iarnă (fig.2.13). În această situaţie, în emisfera australă zilele sînt cele mai lungi, iar nopţile sînt cele mai scurte (în emisfera boreală - invers).

Emisferele nordică şi sudică ocupă din nou situaţii egale (fig.2.10 şi 2.11) după un ocol complet al Pământului în jurul Soarelui, şi această poziţie a Pământului corespunde zilei de echinocţiu de primăvară (21 martie a următorului an), cînd zilele devin egale cu nopţile în toate punctele globului terestru.

Prin urmare, în ipoteza mişcării Pământului în jurul Soarelui, cu ajutorul fig.2.10 - 2.13 se explică destul de simplu fenomenele legate de mişcarea anuală a Soarelui pe sfera cerească, pentru diferitele poziţii ale axei Pământului, adică pentru diferitele zile şi pentru tot globul terestru.

Reamintim că fig.2.6 - 2.9 din problema precedentă dau

posibilitatea de a ne imagina mişcarea Soarelui pe sfera cerească în decurs de un an, pentru un loc oarecare (O) al suprafeţei terestre.

2.7 Să se scrie formula pentru distanţa dintre două puncte de pe suprafaţa globului terestru, de coordonate geografice (L_1, φ_1) şi (L_2, φ_2).

Rezolvare: Notăm (fig.2.14): T - centrul Pământului, G - Greenwich, pp' - axa polilor, qq' - ecuatorul terestru, L - longitudinea geografică, φ - latitudinea geografică, $\widehat{O_1O_2} = x$ şi $O_1(L_1, \varphi_1)$, $O_2(L_2, \varphi_2)$.

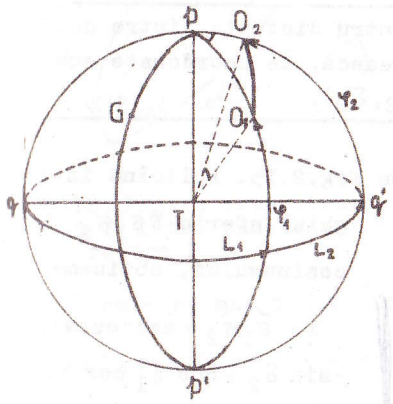

Fig.2.14. Determinarea distanţei dintre două puncte de pe suprafaţa globului terestru.

Din triunghiul sferic pO_1O_2, în care:

$$\hat{p} = L_2 - L_1 = \Delta L,$$

$$\widehat{pO_1} = 90^\circ - \varphi_1,$$

$$\widehat{pO_2} = 90^\circ - \varphi_2,$$

aplicînd formula cosinusului pentru latura necunoscută $\widehat{O_1O_2} = x$, obţinem:

$$\cos \widehat{O_1O_2} = \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_2)\cos(\Delta L), \qquad (2.1)$$

de unde rezultă imediat:

$$x = \widehat{O_1O_2} = \arccos(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\Delta L)). \qquad (2.2)$$

Această formulă poate fi adusă la o formă calculabilă prin logaritmi, astfel:

Notînd: $\sin\varphi_2 = A$, $\cos\varphi_2\cos(\Delta L) = B$, rezultă:

$$\operatorname{tg}\varphi_2\cos(\Delta L) = B/A = \operatorname{tg} M, \qquad (2.3)$$

unde M este un unghi auxiliar. Atunci formula (2.1) devine:

$$\cos\widehat{O_1O_2} = A\sin\varphi_1 + B\cos\varphi_1 = A(\sin\varphi_1 + \operatorname{tg} M\cos\varphi_1) =$$
$$= A\sin(\varphi_1 + M)/\cos M = \sin\varphi_2\sin(\varphi_1 + M)/\cos M,$$

unde M se determină după formula (2.3).

2.8 Să se scrie formula pentru distanţa dintre două puncte de pe sfera cerească, de coordonate ecuatoriale $\sigma_1(\alpha_1, \delta_1)$, $\sigma_2(\alpha_2, \delta_2)$.

Rezolvare: Să considerăm fig.2.15. Aplicînd în triunghiul sferic $P\sigma_1\sigma_2$ formula cosinusului, obţinem:

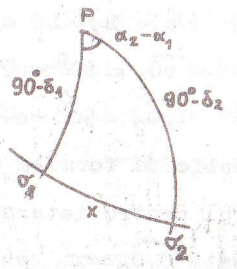

Fig.2.15. Determinarea distanţei dintre două puncte de pe sfera cerească.

$$x = \widehat{\sigma_1\sigma_2} = \arccos(\sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)).$$

Transformarea formulei de mai sus într-o formă calculabilă prin logaritmi se poate efectua într-un mod analog celui prezentat în problema anterioară.

Excepţii:
$\widehat{\sigma_1\sigma_2} < 5'-10'$: $x = \sqrt{(\Delta\alpha\cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2}$ (Meeus p.37) δ-un corp dar nu e adev. pe PC (form. de mai sus e f. exactă)
$\sigma_1\sigma_2 \simeq 180°$

2.9 Un vapor pleacă în ziua de 8 iulie, ora 6 dimineaţa, din portul B ($\varphi_1 = 48°23'$ N, $L_1 = 4°30'$ V), pe un cerc mare, spre portul C ($\varphi_2 = 5°17'$ N, $L_2 = 52°33'$ V). Cînd ajunge vaporul la destinaţie dacă viteza sa medie de deplasare este de 18 mile marine pe oră?

Rezolvare: Se consideră triunghiul sferic PBC (din fig. 2.16), în care:

$$\widehat{PB} = 90° - \varphi_1,$$
$$\widehat{PC} = 90° - \varphi_2,$$
$$\widehat{BPC} = L_2 - L_1.$$

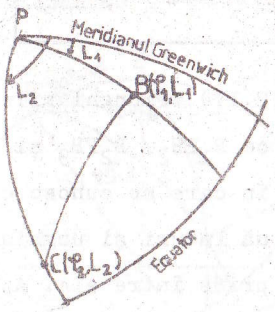

Fig.2.16. Pentru determinarea distanţei între punctele terestre B şi C.

Pentru a determina latura BC a acestui triunghi sferic, aplicăm prima formulă a lui Gauss (formula cosinusului):

$$\cos\widehat{BC} = \cos\widehat{BP}\cos\widehat{CP} + \sin\widehat{BP}\sin\widehat{CP}\cos\widehat{BPC},$$

formulă care se mai poate scrie în modul următor:

$$\cos\widehat{BC} = \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(L_2 - L_1).$$

De aici, ţinînd seama de datele problemei, se obţine:

$$\widehat{BC} = 59°16',6,$$

ceea ce echivalează cu:

$$BC = 3556,6 \text{ mile marine}$$

(1 milă marină = lungimea arcului de cerc mare de 1' de pe sfera terestră).

Timpul necesar pentru ca vaporul să parcurgă această distanţă este:

$t = 3556,6/18 = 197^h,6 = 8$ zile şi $5^h,6 \cong 8$ zile şi 6^h.

Aşadar, vaporul va ajunge în portul C la data de 16 iulie, ora 12.

2.10 La ce distanţă se găsesc oraşele Paris ($\varphi_1 = 48^\circ 50'$ N, $L_1 = 2^\circ 20'$ E), Berlin ($\varphi_2 = 52^\circ 31'$ N, $L_2 = 13^\circ 24'$ E) şi Bucureşti ($\varphi_3 = 44^\circ 25',7$ N, $L_3 = 26^\circ 06',5$ E) unele de altele ?

Indicaţie: Se consideră (fig.2.17) triunghiurile sferice B_1PB_2, B_2PB_3 şi B_1PB_3, în care se cunosc cîte două laturi şi unghiul cuprins între ele. Aplicînd prima formulă a lui Gauss (formula cosinusului), se obţin respectiv laturile:

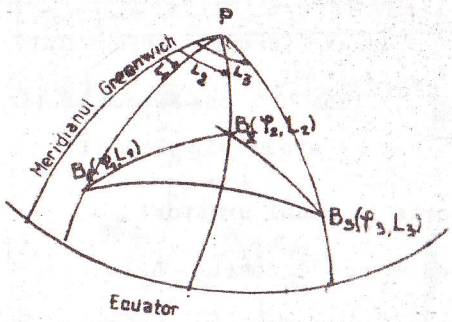

Fig.2.17. Pentru determinarea distanţelor între oraşele Paris, Berlin şi Bucureşti.

$$\widehat{B_1B_2} = 7^\circ 55',$$
$$\widehat{B_2B_3} = 11^\circ 39',$$
$$\widehat{B_1B_3} = 16^\circ 50'.$$

Lungimea liniară a arcului care are α'' situat pe sfera de rază R este: $L = R\alpha'' \sin 1''$, unde $\sin 1'' = 1/206\,265$ şi $R = 6370$ km.

În cazul nostru, obţinem:

$B_1B_2 = 880$ km (distanţa Paris-Berlin),

$B_2B_3 = 1295$ km (distanţa Berlin-Bucureşti),

$B_1B_3 = 1871$ km (distanţa Paris-Bucureşti).

2.11 La momentul sideral $\theta = 19^h 35^m 24^s$, din localitatea Cluj-Napoca, a cărei latitudine geografică este $\varphi = 46^\circ 45' 34''$, s-a observat un satelit artificial al Pămîntului, cu un teodolit care indica coordonatele orizontale $A = 304^\circ 16' 42''$, $z = 28^\circ 17' 41''$. Care au fost coordonatele ecuatoriale ale satelitului la acel moment ?

Rezolvare: Satelitul S are coordonatele orizontale (A,z) şi coordonatele ecuatoriale (α, δ). Trecerea de la coordonatele (A,z) la (α, δ) se face în două etape:

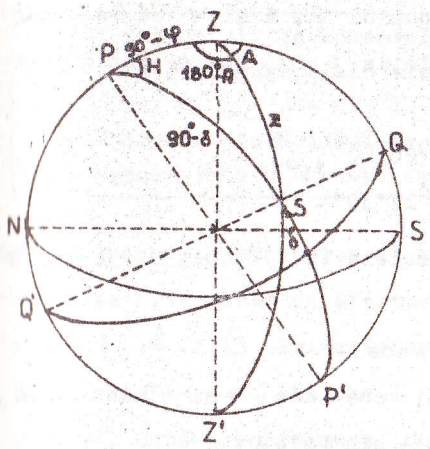

Fig.2.18. Pentru trecerea de la coordonate orizontale la coordonate ecuatoriale şi invers.

1) Trecerea de la (A, z) la coordonatele orare (H, δ).

2) Trecerea de la (H, δ) la (α, δ), care se realizează ţinînd seama de faptul că $\theta = \alpha + H$, sau $\alpha = \theta - H$.

Se consideră triunghiul sferic de poziţie PZS (fig.2.18) unde: $ZS = z$, $PZ = 90^\circ - \varphi$, $PS = 90^\circ - \delta$, $\widehat{ZPS} = H$, $\widehat{PZS} = 180^\circ - A$.

Aplicînd formulele lui Gauss triunghiului sferic PZS (în care $a \equiv 90^\circ - \delta$, $b \equiv z$), se obţine:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos z \cos(90^\circ - \varphi) + \sin z \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A),$$
$$\sin(90^\circ - \delta) \cos H = \cos z \sin(90^\circ - \varphi) - \cos(90^\circ - \varphi) \sin z \cos(180^\circ - A),$$
$$\sin(90^\circ - \delta) \sin H = \sin(180^\circ - A) \sin z,$$

sau:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos z \sin\varphi - \cos\varphi \sin z \cos A , \\ \cos\delta \cos H &= \cos z \cos\varphi + \sin\varphi \sin z \cos A , \\ \cos\delta \sin H &= \sin z \sin A , \end{aligned} \qquad (2.4)$$

formule care pot fi scrise şi sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta \sin H \\ \cos\delta \cos H \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin z \sin A \\ \sin z \cos A \\ \cos z \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

Din formulele (2.4), înlocuind φ, A şi z cu valorile date şi ţinînd seama şi de relaţia $\theta = \alpha + H$, se obţin coordonatele ecuatoriale căutate:

$$\alpha = 21^h 20^m 00^s ,$$
$$\delta = 27^\circ 17' 30'' .$$

Observaţie: Dacă în formulele (2.4) punem $H = \theta - \alpha$, obţinem:

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \cos\varphi \sin z \cos A ,$$
$$\cos\delta (\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha) = \cos z \cos\varphi + \sin\varphi \sin z \cos A ,$$
$$\cos\delta (\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha) = \sin z \sin A .$$

Înmulţind a doua relaţie cu $\cos\theta$, iar pe a treia cu $\sin\theta$ şi adunînd, obţinem:

$$\cos\delta \cos\alpha = \cos z \cos\varphi \cos\theta + \sin z \sin\varphi \cos\theta \cos A + \sin z \sin\theta \sin A .$$

Înmulţind a doua relaţie cu $\sin\theta$, iar pe a treia cu $-\cos\theta$ şi adunînd, obţinem:

$$\cos\delta \sin\alpha = \cos z \cos\varphi \sin\theta + \sin z \sin\varphi \sin\theta \cos A - \sin z \cos\theta \sin A .$$

Rezultă că formulele de trecere de la coordonatele orizontale (A,z) la coordonatele ecuatoriale (α, δ) se pot scrie şi sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & \sin\theta & \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & -\cos\theta & \cos\varphi \sin\theta \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin z \cos A \\ \sin z \sin A \\ \cos z \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

care este convenabilă pentru programarea la calculator.

2.12 Într-o zi, la momentul sideral $\theta = 19^h 35^m 24^s$, coordonatele ecuatoriale ale unei comete sînt următoarele: $\alpha = 17^h 50^m 47^s,5$, $\delta = +27^\circ 17' 36''$. În ce direcţie (A,z) trebuie îndreptat teodolitul de la Observatorul Astronomic din Cluj-Napoca ($\varphi = 46^\circ 45' 34''$) pentru a observa cometa?

Rezolvare: Trecerea de la coordonate ecuatoriale la coordonate orizontale se efectuează conform schemei $(\alpha, \delta) \longrightarrow (H, \delta) \longrightarrow (A,z)$. Prima transformare se realizează pe baza formulei $H = \theta - \alpha$ (în cazul nostru, $H = 1^h 44^m 36^s,5$). Pentru cea de-a doua transformare, se consideră triunghiul de poziţie PZS (fig.2.18), căruia i se aplică formulele lui Gauss (luînd $a \equiv z$, $b \equiv 90^\circ - \delta$). Se obţine:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H , \\ -\sin z \cos A &= \sin\delta \cos\varphi - \sin\varphi \cos\delta \cos H , \\ \sin z \sin A &= \sin H \cos\delta , \end{aligned} \qquad (2.7)$$

sau sub formă matricială:

$$\begin{pmatrix} \sin z \sin A \\ -\sin z \cos A \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta \sin H \\ \cos\delta \cos H \\ \sin\delta \end{pmatrix} . \qquad (2.8)$$

Înlocuind în formulele (2.7) valorile date φ, H şi δ, se ob-

ţin coordonatele orizontale căutate:

$$A = 55^{\circ}43'20'',$$

$$z = 28^{\circ}17'40''.$$

2.13 La o epocă dată steaua Capella are coordonatele ecuatoriale (α, δ). Să se determine coordonatele sale ecliptice (λ, β), ştiind că înclinarea eclipticii pe ecuator este ε. Aplicaţie: $\alpha = 5^h05^m42^s,03$; $\delta = 45^{\circ}50'22'',4$; $\varepsilon = 23^{\circ}27'26''$.

Rezolvare: Se consideră (fig.2.19) triunghiul sferic $\Pi P G$, în care:

$$\Pi G = 90^{\circ} - \beta \quad (\equiv a),$$

$$PG = 90^{\circ} - \delta \quad (\equiv b),$$

$$P\Pi = \varepsilon,$$

$$\hat{P} = 90^{\circ} + \alpha,$$

$$\hat{\Pi} = 90^{\circ} - \lambda.$$

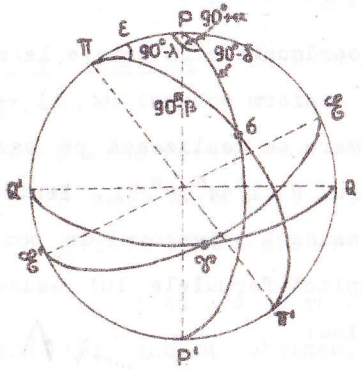

Fig.2.19. Pentru trecerea de la coordonate ecuatoriale la coordonate ecliptice şi invers.

Aplicăm în acest triunghi sferic formulele fundamentale ale trigonometriei sferice (formulele lui Gauss). Se obţin astfel următoarele relaţii care permit trecerea de la coordonatele ecuatoriale la cele ecliptice:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha, \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha, \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\alpha\cos\delta, \end{aligned} \qquad (2.9)$$

$\varepsilon = 23^{\circ}.45$

sau, sub formă matricială:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Înlocuind în formulele (2.9) valorile α, δ şi ε, se obţin coordonatele ecliptice ale stelei:

$$\lambda = 5^h19^m06^s,66,$$

$$\beta = 22^{\circ}51'45''.$$

2.14 - O cometă are coordonatele ecliptice (λ, β). Care sînt coordonatele ecuatoriale ale cometei ştiind că înclinarea eclipticii pe ecuator este ε? Aplicaţie: $\lambda = 5^h43^m01^s,5$; $\beta = 45^{\circ}07'48''$; $\varepsilon = 23^{\circ}27'26''$.

Rezolvare: Se aplică formulele lui Gauss triunghiului sferic $\Pi P G$ (fig.2.19) (unde $a = 90^{\circ} - \delta$, $b = 90^{\circ} - \beta$). Se obţine:

$$\begin{cases} \sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda, \\ \cos\delta\sin\alpha = -\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda, \\ \cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda\cos\beta, \end{cases} \qquad (2.11)$$

sau, în formă matricială:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

Aceste relaţii permit trecerea de la coordonatele ecliptice la coordonatele ecuatoriale. Pentru aplicaţia numerică, pe baza valorilor λ, β, ε şi utilizînd formulele (2.11), se obţin coordonatele ecuatoriale ale cometei:

$= 90^{\circ}$. Atunci $\cos z = 0$ şi din (2.15) rezultă:

$$\cos H = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi \Longrightarrow \left\langle \begin{matrix} H \\ -H \end{matrix} \right. . \qquad (2.16)$$

Soluţia $-H$ corespunde răsăritului, iar soluţia $+H$ corespunde apusului astrului.

Timpul sideral al răsăritului şi apusului este dat respectiv de:

$$\theta_r = \alpha - H ,$$
$$\theta_a = \alpha + H .$$

Pentru a calcula locul răsăritului şi apusului astrului, se aplică formula cosinusului pentru latura $PS = 90^{\circ} - \delta$ a triunghiului sferic PZS:

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos A . \qquad (2.17)$$

Cînd $z = 90^{\circ}$, din (2.17) rezultă:

$$\cos A = -\sin\delta / \cos\varphi , \qquad (2.18)$$

relaţie care este satisfăcută pentru valorile A şi $360^{\circ} - A$, ce corespund apusului şi, respectiv, răsăritului astrului S.

Formulele (2.16) şi (2.18) se mai pot scrie şi în forma:

$$\cos H = -\operatorname{tg}\delta / \operatorname{tg}(90^{\circ} - \varphi) ,$$
$$\cos A = -\sin\delta / \sin(90^{\circ} - \varphi) .$$

Deoarece $-1 \leq \cos A \leq 1$ şi $-1 \leq \cos H \leq 1$, rezultă că $|\delta| \leq 90^{\circ} - \varphi$ pentru ca steaua S să fie văzută din localitatea de latitudine φ ca un astru cu răsărit şi apus.

CAPITOLUL III

PĂMÎNTUL - CORP CERESC

3.1 Să se demonstreze că valoarea unghiulară a arcului de meridian $\widehat{O_1O_2}$ (în ipoteza sfericităţii Pămîntului) se determină cu ajutorul formulei:

$$n^o = \varphi_1 - \varphi_2 = z_1 - z_2 ,$$

unde φ_1, φ_2 sînt latitudinile geografice ale punctelor O_1, O_2, iar z_1, z_2 sînt distanţele zenitale meridiane ale unei stele măsurate simultan din punctele O_1, O_2.

Rezolvare: Din fig.3.1, în care globul pămîntesc este reprezentat într-o secţiune meridiană (q'q este ecuatorul terestru, O_1 şi O_2 - doi observatori situaţi pe acelaşi meridian), se vede că arcul de meridian $\widehat{O_1O_2} = n^o$ (în grade) se exprimă prin formula:

$$n^o = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

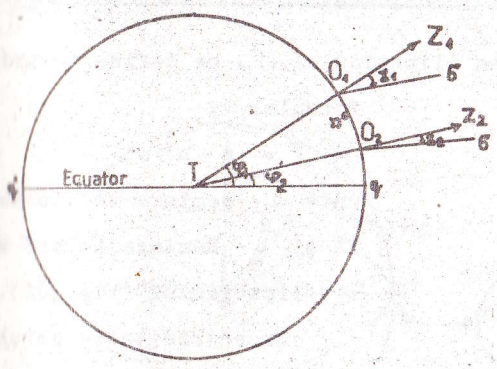

Fig.3.1. Pentru determinarea valorii unghiulare a arcului de meridian.

Pe de altă parte, ştiind că între distanţa zenitală şi declinaţia unei stele situate între ecuatorul ceresc şi zenitul observatorului există relaţia:

$$z = \varphi - \delta \quad (\delta > 0) ,$$

rezultă că pentru cei doi observatori, O_1 şi O_2, care obser-

vă simultan steaua $\mathfrak{S}$ obţinem:

$$z_1 = \varphi_1 - \delta \quad \text{şi} \quad z_2 = \varphi_2 - \delta .$$

Făcînd diferenţa, rezultă formula:

$$z_1 - z_2 = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Observaţie: Dacă astrul $\mathfrak{S}$ este chiar Soarele şi dacă observaţia se efectuează în ziua solstiţiului de vară, la amiază, în O_2 (Assuan, situat pe tropicul Racului; $z_2 = 0^o$) şi în O_1 (Alexandria; $z_1 = 7^o,2$), obţinem - ca şi Eratostene - $n^o = \varphi_1 - \varphi_2 = 7^o,2$.

3.2 Considerînd Pămîntul drept elipsoid de rotaţie, avînd turtirea $\bar{\varepsilon}$, să se arate că între această mărime şi excentricitatea unei elipse meridiane, e, există relaţia:

$$(1 - \bar{\varepsilon})^2 = 1 - e^2 .$$

Rezolvare: Turtirea elipsoidului, $\bar{\varepsilon}$, se defineşte prin formula:

$$\bar{\varepsilon} = (a - b)/a ,$$

unde a - semiaxa ecuatorială şi b - semiaxa polară ale elipsoidului (fig.3.2).

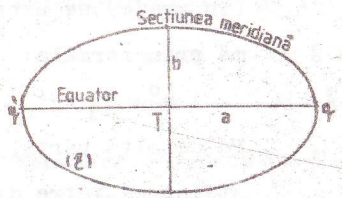

Fig.3.2. Secţiune meridiană a elipsoidului terestru.

Excentricitatea elipsei meridiane (e) obţinute prin secţiunea elipsoidului cu un plan meridian oarecare (fig. 3.2) este dată de formula:

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2} .$$

Avem, succesiv:

$$\bar{\varepsilon} = 1 - b/a \implies b/a = 1 - \bar{\varepsilon} ;$$

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2} \implies b/a = \sqrt{1 - e^2}$$

Prin egalarea celor două expresii pentru b/a şi ridicare la pătrat, obţinem relaţia căutată.

De aici, de exemplu:

$$e = \sqrt{1 - (1 - \bar{\varepsilon})^2} .$$

Aplicaţie numerică: $\bar{\varepsilon} = 1/298,3$ şi $e = 0,0818$.

3.3 Să se exprime coordonatele geocentrice ecuatoriale rectangulare ale unui punct al elipsei meridiane, M(x,y), cu ajutorul latitudinii geocentrice φ'.

Rezolvare: Fie observatorul în punctul M de rază vectoare geocentrică ϱ şi latitudine geocentrică φ'; M' - punctul de pe cercul circumscris elipsei, corespunzător punctului M de pe elipsă şi situat pe perpendiculara dusă prin M pe axa mare a elipsei avînd piciorul în Q; $\Psi = \widehat{M'TQ}$ este latitudinea excentrică a lui M (fig.3.3).

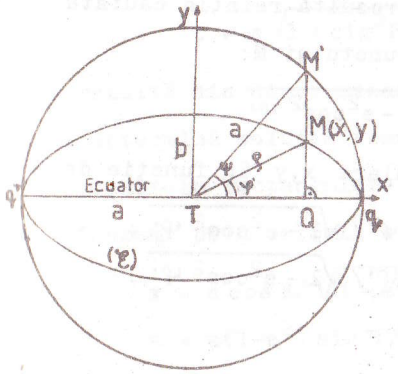

Fig.3.3. Pentru exprimarea coordonatelor x,y în funcţie de latitudinea geocentrică.

Coordonatele rectangulare ale punctului M în sistemul de coordonate Txyz, ales în planul elipsei meridi-

ane, au expresiile:

$$x = \varrho \cos \varphi' \ , \quad y = \varrho \sin \varphi' \ .$$

Trebuie să mai exprimăm mărimea ϱ în funcţie de φ'. Aceasta se face prin intermediul utilizării unghiului Ψ.

Din ecuaţiile parametrice (cunoscute) ale elipsei (pentru care, în cazul nostru, parametrul t este chiar Ψ):

$$x = a \cos \Psi \ , \quad y = b \sin \Psi = a\sqrt{1-e^2} \sin \Psi \ ,$$

unde e este excentricitatea elipsei, rezultă imediat relaţia

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Psi} \ .$$

Relaţia dintre unghiurile Ψ şi φ' se poate obţine în modul următor:

$$\sin \varphi' = y/\varrho = a\sqrt{1-e^2} \sin \Psi \ / \ (a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Psi}) \ ,$$

de unde se deduce imediat:

$$\sin^2 \Psi = \sin^2 \varphi' / (1 - e^2 \cos^2 \varphi') \ .$$

Aşadar, prin înlocuire, rezultă relaţia căutată pentru raza vectoare geocentrică a punctului M:

$$\varrho = a\sqrt{1-e^2} / \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} \ ,$$

de unde coordonatele rectangulare x,y în funcţie de φ':

$$x = a\sqrt{1-e^2} \cos \varphi' / \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} \ ,$$
$$y = a\sqrt{1-e^2} \sin \varphi' / \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi'} \ .$$

3.4 Să se exprime aceleaşi coordonate rectangulare ca şi în problema 3.3, în funcţie de latitudinea geodezică B ($\equiv \varphi_1$ - notaţia din manual).

Rezolvare: Alegem acum sistemul de coordonate Txz în planul elipsei meridiane a punctului M al elipsoidului terestru (T) (fig.3.4).

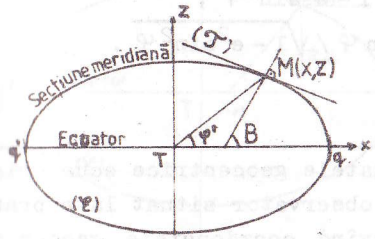

Fig.3.4. Pentru exprimarea coordonatelor x,z în funcţie de latitudinea geodezică.

Coordonatele punctului $M(x,z)$ trebuie să satisfacă atît ecuaţia elipsei $(\mathcal{E})$:

$$x^2/a^2 + z^2/(a^2(1-e^2)) = 1 \ ,$$

cît şi ecuaţia tangentei $(\mathcal{T})$ trecînd prin M:

$$z = -(1/\operatorname{tg} B)\, x + c \ ,$$

constanta c trebuind aleasă astfel ca elipsa $(\mathcal{E})$ şi dreapta $(\mathcal{T})$ să aibă un punct comun.

Condiţia impusă este satisfăcută dacă avem:

$$c = a\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 B - e^2} \ ,$$

cea ce rezultă din discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea care determină soluţia comună a celor două ecuaţii.

Coordonatele rectangulare ale punctului M în funcţie de B rezultă acum, prin calcule simple, astfel:

$$x = a \cos B / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \ ,$$
$$z = a(1-e^2) \sin B / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \ .$$

Observaţie: Neglijînd diferenţa dintre latitudinea geodezică (B) şi latitudinea astronomică (φ), deci nefăcînd distincţie între cele două latitudini $(B = \varphi)$, formulele obţinute servesc şi pentru exprimarea coordonatelor rectangulare ale

punctului $M \in (\mathfrak{E})$ în funcţie de latitudinea astronomică φ:

$$x = a\cos\varphi / \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,,$$
$$z = a(1-e^2)\sin\varphi / \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,.$$

3.5 Să se arate că coordonatele geocentrice ecuatoriale rectangulare ale unui observator situat la suprafaţa Pământului, în punctul avînd coordonatele geodezice: L - longitudinea geodezică, B - latitudinea geodezică şi H - înălţimea geodezică, sînt date de formulele:

$$x = (C+H)\cos B\cos L\,,$$
$$y = (C+H)\cos B\sin L\,,$$
$$z = (S+H)\sin B\,,$$

unde:

$$C = a/\sqrt{1 - e^2\sin^2 B}\,, \quad S = (1-e^2)C\,,$$

iar a şi e sînt, respectiv, semiaxa mare şi excentricitatea elipsei meridiane.

Reamintim definiţia coordonatelor geodezice: L - unghiul format de planul meridian al locului dat cu planul meridianului zero de la Greenwich; B - unghiul cuprins între verticala dusă la planul tangent al elipsoidului de referinţă în punctul dat şi planul ecuatorului; H - distanţa locului de observaţie de la elipsoidul de referinţă.

Rezolvare: Fie O poziţia observatorului avînd înălţimea geodezică H deasupra elipsoidului terestru (cu centrul în T). Alegem sistemul de coordonate astfel ca Txz să fie în planul elipsei meridiane, iar axa Ty să fie în planul ecuatorului terestru.

Din fig.3.5 se vede că:

$$\Delta x = H\cos B\,, \qquad \Delta z = H\sin B$$

şi, de asemenea:

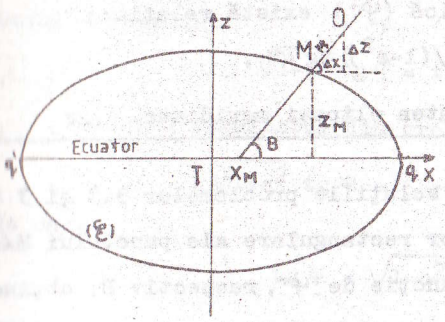

Fig.3.5. Pentru determinarea coordonatelor geocentrice ecuatoriale ale unui punct terestru.

$$x_0 = x_M + \Delta x\,,$$
$$z_0 = z_M + \Delta z\,,$$

unde (x_0, z_0) sînt coordonatele rectangulare ale observatorului (O), iar (x_M, z_M) sînt coordonatele rectangulare ale punctului M, situat pe suprafaţa elipsoidului, la intersecţia cu verticala ce trece prin O.

Introducînd expresiile coordonatelor punctului M, determinate în problema 3.4, obţinem pentru coordonatele rectangulare ale punctului O din planul elipsei meridiane $(\mathfrak{E})$ formulele:

$$x_0 = (a/\sqrt{1 - e^2\sin^2 B} + H)\cos B\,,$$
$$z_0 = (a(1-e^2)/\sqrt{1 - e^2\sin^2 B} + H)\sin B\,,$$

unde a şi e sînt, respectiv, semiaxa mare şi excentricitatea elipsei meridiane.

Folosind notaţiile C şi S din enunţ, precum şi definiţia longitudinii geodezice L, ajungem la formulele care trebuiau deduse în sistemul de coordonate Txyz (în care acum axa Tx este orientată după intersecţia planului meridianului zero de la Greenwich cu planul ecuatorului, iar $Ty \perp Tx$).

3.6 Să se arate că între latitudinea geodezică (B) şi latitudinea geocentrică (φ') există relaţia:

$$tg\,B = (1/(1-e^2))\,tg\,\varphi' ,$$

unde e este excentricitatea elipsei meridiane.

Rezolvare: Folosind soluţiile problemelor 3.3 şi 3.4, fă cînd raportul coordonatelor rectangulare ale punctului $M \in (\mathcal{C})$ coordonate exprimate în funcţie de φ', respectiv B, obţinem:

$$tg\,\varphi' = (1-e^2)\,tg\,B .$$

Observaţii: 1) Nefăcînd distincţie între coordonatele B şi φ, relaţia dintre latitudinea geocentrică (φ') şi latitudinea astronomică (φ) se exprimă prin formula:

$$tg\,\varphi' = (1-e^2)\,tg\,\varphi .$$

2) Această formulă se poate obţine şi altfel, fără a cunoaşte soluţiile problemelor 3.3 şi 3.4, aşa cum se indică în manual.

3.7 Să se arate că între latitudinea excentrică (Ψ) şi latitudinea geodezică (B) există relaţia:

$$tg\,\Psi = \sqrt{1-e^2}\,tg\,B ,$$

unde e este excentricitatea elipsei meridiane.

Rezolvare: Din ecuaţiile parametrice ale elipsei meridiane ($\mathcal{C}$):

$$x = a\cos\Psi , \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\Psi$$

şi din ecuaţiile:

$$x = \varrho\cos\varphi' , \qquad y = \varrho\sin\varphi' ,$$

rezultă relaţia:

$$\sqrt{1-e^2}\,tg\,\Psi = tg\,\varphi' .$$

Folosind rezultatul din problema precedentă, 3.6, avem:

$$\sqrt{1-e^2}\,tg\,\Psi = (1-e^2)\,tg\,B ,$$

de unde:

$$tg\,\Psi = \sqrt{1-e^2}\,tg\,B .$$

Observaţie: Nefăcînd distincţie între latitudinea geodezică şi latitudinea astronomică ($B = \varphi$), are loc şi relaţia:

$$tg\,\Psi = \sqrt{1-e^2}\,tg\,\varphi .$$

3.8 Să se demonstreze că diferenţa dintre latitudinea geodezică (B) şi latitudinea geocentrică (φ') se exprimă prin următoarea relaţie aproximativă:

$$B - \varphi' = 103\,132'',4\; e^2\sin(2B) ,$$

unde e este excentricitatea elipsei meridiane.

Care este $\max(B - \varphi')$ şi pentru care cerc meridian are loc?

Rezolvare: Pentru determinarea diferenţei $B - \varphi'$, vom pleca de la formula trigonometrică (cunoscută):

$$tg(B - \varphi') = (tg\,B - tg\,\varphi')/(1 + tg\,B\,tg\,\varphi')$$

şi vom folosi rezultatul din problema 3.6:

$$tg\,\varphi' = (1-e^2)\,tg\,B .$$

Rezultă:

$$tg(B - \varphi') = e^2 tg\,B/(1 + (1-e^2)\,tg^2B) =$$

$$= e^2\sin B\cos B/(\cos^2B + (1-e^2)\sin^2B) = e^2\sin(2B)/(2(1 - e^2\sin^2B)).$$

Limitîndu-ne la primul termen din dezvoltarea în serie a funcţiei $1/(1-e^2\sin^2 B)$, deja e^2 fiind mic ($e^2 \cong 0{,}00673$, vezi problema 3.2) şi ţinînd cont de faptul că diferenţa $B-\varphi'$ este un unghi mic, ajungem la formula:

$$(B-\varphi')'' = 103\,132'',4\, e^2 \sin(2B) .$$

Dacă luăm $B=\varphi$, formula de mai sus devine:

$$(\varphi-\varphi')'' = 103\,132'',4\, e^2 \sin(2\varphi) .$$

Observaţie: Nu este greu de văzut că diferenţa $B-\varphi'$ se exprimă şi în funcţie de φ' cu aceeaşi aproximaţie (neglijînd termenii începînd cu al doilea (de ordinul de mărime e^6) în dezvoltarea în serie a funcţiei $1/(1-e^2\cos^2\varphi')$):

$$(B-\varphi')'' = 103\,132'',4\, e^2 \sin(2\varphi') .$$

Observăm, de asemenea, că $\max(\varphi-\varphi')$ atinge 11'40" pentru $\varphi = 45^\circ 06'$, după prima formulă, şi este aproximativ egal cu 11',5 pentru $\varphi \cong 45^\circ$, după a doua formulă.

3.9 Să se demonstreze că lungimea arcului de meridian $\ell_{(\widehat{O_1O_2})}$ dintre punctele $O_1(\varphi_1)$ şi $O_2(\varphi_2)$, unde reprezintă latitudinea astronomică, se exprimă prin formula:

$$\ell_{(\widehat{O_1O_2})} = a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}\, d\varphi ,$$

unde a şi e sînt, respectiv, semiaxa mare şi excentricitatea elipsei meridiane (✎).

Rezolvare: Ne folosim de coordonatele rectangulare ale punctului $O \in$ (✎), de la problema 3.4:

$$x = a\cos\varphi/\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} , \quad y = a(1-e^2)\sin\varphi/\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} \qquad (3.1)$$

care se mai pot obţine şi folosind ecuaţiile parametrice ale elipsei, cu parametrul Ψ (latitudinea excentrică):

$$x = a\cos\Psi , \quad y = b\sin\Psi = a\sqrt{1-e^2}\sin\Psi$$

şi ţinînd seama de relaţia dintre Ψ şi φ (problema 3.7).

Pentru demonstrarea formulei lungimii arcului de meridian, utilizăm cunoscutul rezultat al lui Cauchy: dacă arcul de curbă $\widehat{AB}$ este dat de ecuaţiile parametrice: $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a \leq t \leq b$, f şi g fiind funcţii cu prima derivată continuă, atunci:

$$\ell_{(\widehat{AB})} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\, dt . \qquad (3.2)$$

(În cazul arcului de cerc, $\ell_{(\widehat{AB})} = \pi R\, n^\circ/180^\circ$, unde n este măsura arcului în grade sexagesimale, iar R - raza cercului).

Obţinem prin derivarea expresiilor (3.1):

$$x' = -(1-e^2)\, a\sin\varphi\, (1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2} ,$$
$$y' = (1-e^2)\, a\cos\varphi\, (1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2} . \qquad (3.3)$$

În cazul nostru, ţinînd seama de faptul că $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ şi că funcţiile $x'(\varphi)$ şi $y'(\varphi)$ sînt continue, formula (3.2) devine:

$$\ell_{(\widehat{O_1O_2})} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\, d\varphi$$

şi, înlocuind x' şi y' cu expresiile date de (3.3), se ajunge uşor la formula care trebuia demonstrată.

3.10 Să se determine proiecţia unei poziţii a satelitului artificial al Pămîntului pe elipsoidul de referinţă, astfel ca dreapta ce uneşte satelitul cu punctul de proiecţie să fie perpendiculară pe planul tangent la

elipsoid în punctul de proiecţie. Să se calculeze coordonatele geodezice ale punctului de proiecţie în funcţie de coordonatele geocentrice rectangulare ale satelitului.

Rezolvare: Vom considera fig.3.6, în care:

S - poziţia satelitului artificial al Pămîntului;

x,y - coordonatele rectangulare ale lui S în planul meridian al satelitului, presupuse cunoscute;

M - punctul de proiecţie a satelitului pe elipsoidul de referinţă (T), avînd coordonatele geodezice (L,B) ce urmează să se determine;

δ - latitudinea geocentrică (= declinaţia) a satelitului S.

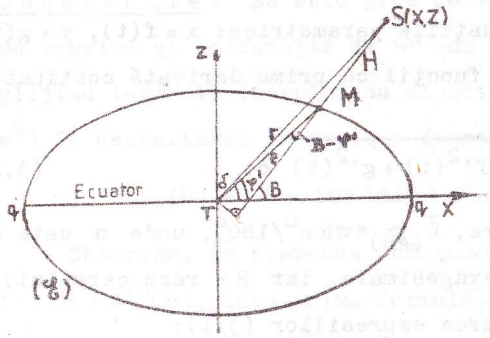

Fig.3.6. Pentru determinarea coordonatelor geodezice ale punctului subsatelit.

În primul rînd se determină r şi δ după formulele evidente (fig.3.6):

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}\ , \qquad \delta = \operatorname{arctg}(z/x)\ .$$

Coordonatele B şi H se determină prin aproximaţii succesive în modul următor:

În prima aproximaţie se poate considera $\varphi' = \delta$, declinaţia δ fiind deja determinată în funcţie de x şi z. Dacă se cunoaşte φ', codrdonatele ϱ şi B se determină ca în problemele 3.3 şi 3.6, după formulele:

$$\varrho = a\sqrt{1-e^2}/\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi'}\ ,$$

$$B = \operatorname{arctg}((1/(1-e^2))\operatorname{tg}\varphi')\ ,$$

e fiind excentricitatea elipsei meridiane (℘).

Determinarea lui H, aşa cum se vede din fig.3.6, se poate face după formula:

$$H = \sqrt{r^2 - \varrho^2\sin^2(B - \varphi')} - \varrho\cos(B - \varphi')\ .$$

În sfîrşit, se determină valoarea aproximativă a unghiului $(\delta - \varphi')$ după teorema sinusului:

$$\sin(\delta - \varphi')\,/\,H = \sin(180^\circ - (B - \varphi'))\,/\,r\ ,$$

de unde:

$$\delta - \varphi' = \arcsin((H/r)\sin(B - \varphi'))\ .$$

Cunoscînd $(\delta - \varphi')$, vom obţine o aproximaţie mai bună pentru $\varphi' = \delta - (\delta - \varphi')$. Cu această valoare a lui φ' se vor repeta paşii indicaţi pînă ce B şi H se obţin cu precizia cerută.

Cunoscînd pe B şi H, L se determină, pe baza formulelor problemei 3.5, astfel:

$$\operatorname{tg} L = y/z = \sqrt{(C+H)^2\cos^2 B + (S+H)\sin^2 B}\,/\,((S+H)\sin B)\ .$$

Observaţie: O formulă de control pentru H este:

$$H^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,q\cos(\delta - \varphi')\ .$$

3.11 Să se determine coordonatele geocentrice rectangulare ale unui observator terestru, O, care are latitudinea geodezică $L = 0^\circ$, iar înălţimea geodezică H = 1500 m.

Răspuns: $x = 0{,}76728894$, $y = 0$, $z = 0{,}63952347$, unitatea de lungime fiind raza ecuatorială medie a Pământului.

3.12 Să se arate că diferenţa dintre latitudinea geografică şi cea geocentrică a unui punct al elipsei meridiane terestre, în a doua aproximaţie (în sensul păstrării primilor doi termeni din dezvoltarea în serie a funcţiei $1/(1-e^2\cos^2\varphi)$, se exprimă prin formula:

$$(\varphi - \varphi')'' = 694''{,}09 \sin(2\varphi) - 1''{,}16 \sin(4\varphi),$$

ştiind că excentricitatea elipsei meridiane a Pământului este $e = 0{,}0818$.

3.13 Să se arate că raportul dintre raza geocentrică a unui punct al elipsei meridiane şi semiaxa mare a elipsoidului terestru, în a doua aproximaţie (în acelaşi sens ca în problema 3.12), se exprimă prin formula:

$$\varrho/a = 1 - 0{,}0033245 \sin(2\varphi) - 0{,}000285 \sin(4\varphi).$$

3.14 Care sînt dovezile observaţionale ale mişcării de rotaţie a Pământului în jurul axei sale?

Răspuns: Pentru mişcarea de rotaţie a Pământului în jurul axei polilor, de la vest la est, în sens opus mişcării acelor ceasornicului, pentru un observator situat în emisfera nordică, dispunem de următoarele dovezi directe:

1) Fenomenul devierii spre est a corpurilor de la verticala locului, în căderea liberă, observat pentru prima dată în

anul 1804 (înălţimea căderii fiind de 85 m, iar devierea observată - de 11,5 mm); modelarea matematică a fenomenului se face în cadrul mecanicii teoretice.

2) Experienţa cu pendulul lui Foucault, bazată pe proprietatea pendulului de a-şi păstra planul în care oscilează, a fost efectuată pentru prima oară în anul 1851 (lungimea pendulului fiind de 67 m, iar masa sarcinii - de 28 kg); modelarea matematică a fenomenului se face în cadrul mecanicii teoretice, arătîndu-se că măsura devierii planului este $15^\circ \sin\varphi$ unde φ este latitudinea geografică a locului.

3) Devierea corpurilor în mişcare liberă pe suprafaţa Pământului, observată la începutul secolului XIX de către Coriolis (fenomenul se dovedeşte experimental în cadrul fizicii); devierea de la direcţia mişcării, în emisfera nordică, se face spre dreapta, iar în emisfera sudică - spre stînga, fenomenul fiind modelat în cadrul mecanicii teoretice (mişcarea în sistemele de referinţă mobile, neinerţiale). Acest fenomen are consecinţe importante asupra multor fenomene geofizice, ca: direcţiile vînturilor alizee (în ţările tropicale: nord-estice în emisfera nordică, sud-estice în emisfera sudică), direcţiile ciclonilor (cunoscuţi din meteorologie ca fiind formaţiuni cu distribuţii barice aproape concentrice, avînd presiunea minimă în centru), devierea curenţilor oceanici etc.

4) Existenţa forţei centrifuge pe suprafaţa terestră şi a turtirii Pământului de-a lungul axei sale de rotaţie.

5) Observaţii optice (vizuale şi fotografice) efectuate cu ajutorul aparatelor instalate la bordul sateliţilor arti-

ficiali ai Pămîntului.

3.15	Care sînt dovezile observaţionale ale mişcării de revoluţie a Pămîntului în jurul Soarelui ?

Răspuns : 1) Fenomenul paralaxelor stelare, modelat matematic prin elipsele de paralaxă anuală (vezi capitolul IV).

2) Fenomenul aberaţiei luminii, modelat matematic prin elipsele de aberaţie anuală a luminii (capitolul IV).

3) Observaţie : De fapt, aşa cum a observat astronomul V. Ambarţumian, coincidenţa perioadelor de revoluţie în jurul Pămîntului ale planetelor exterioare Marte, Jupiter şi Saturn (pe epiciclurile corespunzătoare), precum şi ale planetelor interioare Mercur şi Venus (pe deferentele lor) cu perioada de revoluţie a Soarelui (coincidenţă neexplicată în sistemul geocentric al lumii după Ptolemeu; vezi capitolul VI), constituie o dovadă directă a valabilităţii sistemului heliocentric al lui Copernic (vezi capitolul VI), deoarece cauza acestor mişcări aparente ale planetelor, ca şi a mişcărilor aparente ale stelelor "fixe" pe elipsele de paralaxă anuală, este aceeaşi - mişcarea Pămîntului în jurul Soarelui.

CAPITOLUL IV

FENOMENE CARE MODIFICĂ POZIȚIILE ASTRILOR PE CER

4.1 Să se stabilească o formulă pentru refracția astronomică în cazul modelului sferic concentric pentru atmosfera terestră.

Rezolvare: În acest model se presupune că atmosfera terestră este formată din straturi sferice, concentrice și suficient de subțiri pentru a putea fi considerate omogene.

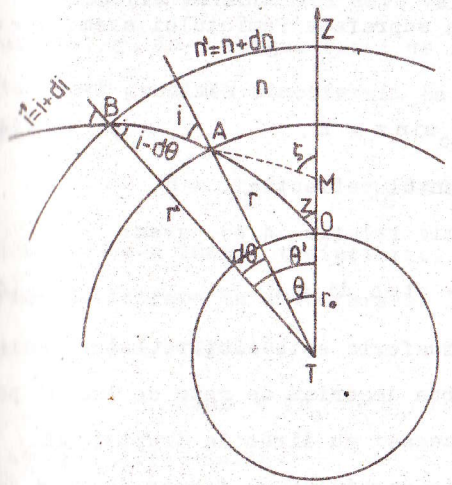

Fig.4.1. Schema refracției astronomice.

Fie două straturi având indicii de refracție n și n' = n + dn. Notăm cu r și r' = r + dr distanțele lor față de centrul Pământului, a cărui rază este r_0 (fig.4.1).

În planul în care se situează raza de lumină considerăm sistemul de coordonate polare (r,θ), având polul în T și drept axă verticala locului TZ. Lumina care vine de la astru până la observatorul situat în O descrie o curbă din care stratul atmosferic cu indicele de refracție n delimitea-

ză arcul $\widehat{BA}$, asimilabil cu segmentul de dreaptă BA, a cărui direcţie formează unghiul ζ cu verticala locului. Dacă i şi $i' = i + di$ sînt unghiurile de incidenţă în A şi respectiv B, atunci din triunghiul ATB se observă că unghiul de refracţie în B este $i - d\theta$. În baza legilor refracţiei şi a teoremei sinusului din trigonometrie, avem:

$$\sin i' / \sin(i - d\theta) = n/n' , \qquad (4.1)$$

$$\sin(i - d\theta) / \sin i = r/r' . \qquad (4.2)$$

Înmulţind termen cu termen relaţiile (4.1) şi (4.2), se obţine

$$\sin i' / \sin i = nr/(n'r') \quad \text{sau} \quad n'r'\sin i' = nr\sin i , \qquad (4.3)$$

care exprimă faptul că produsul $nr\sin i$ este constant de-a lungul razei de lumină. La suprafaţa Pămîntului avem: $n = n_o$, $r = r_o$, $i = z$ şi atunci:

$$nr\sin i = n_o r_o \sin z = K , \qquad (4.4)$$

unde K se numeşte invariantul refracţiei.

Diferenţiind logaritmic relaţia (4.4), avem:

$$dn/n + dr/r + \operatorname{ctg} i\, di = 0 . \qquad (4.5)$$

Presupunînd că stratul atmosferic este subţire, atunci direcţia tangentei în A la curba descrisă de raza de lumină poate fi considerată ca fiind aceeaşi cu direcţia dreptei AB. În coordonate polare, tangenta unghiului i format de raza vectoare şi tangenta la curbă în punctul A este:

$$\operatorname{tg} i = r/(dr/d\theta) , \qquad (4.6)$$

de unde rezultă:

$$dr/r = (1/\operatorname{tg} i)\, d\theta = \operatorname{ctg} i\, d\theta . \qquad (4.7)$$

Înlocuind (4.7) în (4.5), se obţine:

$$d\theta + di = -\operatorname{tg} i\,(dn/n) . \qquad (4.8)$$

Din triunghiul AMT se observă că $\zeta = \theta + i$ şi atunci:

$$d\zeta = d\theta + di . \qquad (4.9)$$

Din (4.8) şi (4.9) rezultă:

$$d\zeta = -\operatorname{tg} i\,(dn/n) , \qquad (4.10)$$

numită ecuaţia diferenţială a refracţiei astronomice. Ea reprezintă variaţia distanţei zenitale, ζ, datorită refracţiei în stratul elementar din vecinătatea punctului A.

Refracţia astronomică este variaţia totală a distanţei zenitale, ζ, de-a lungul razei de lumină, cînd aceasta străbate toată grosimea atmosferei. Ea este dată de integrala curbilinie:

$$R = \int_C d\zeta = -\int_C \operatorname{tg} i\,(dn/n) , \qquad (4.11)$$

calculată de-a lungul traiectoriei luminoase între punctul superior de intrare în atmosferă şi suprafaţa Pămîntului.

Din (4.4) rezultă:

$$\sin i = (r_o/r)(n_o/n)\sin z$$

şi atunci (4.11) devine:

$$R = -\int_{n_o}^{1} (n_o r_o \sin z / \sqrt{n^2 r^2 - \sin^2 z})(dn/n) ,$$

sau:

$$R = \sin z \int_{1}^{n_o} (1/\sqrt{(nr/(n_o r_o))^2 - \sin^2 z})(dn/n) , \qquad (4.12)$$

numită integrala refracţiei. Ea poate fi dezvoltată în serie după puterile impare ale lui $\operatorname{tg} z$:

$$R = A\,\mathrm{tg}\,z + B\,\mathrm{tg}^3 z + C\,\mathrm{tg}^5 z + \dots, \qquad (4.13)$$

coeficienţii A, B, C,... deducîndu-se fie din observaţii, fie teoretic, pe baza modelelor de atmosferă terestră.

4.2	Să se determine efectul pe care îl are refracţia asupra coordonatelor ecuatoriale ale unui astru.

Rezolvare: Fie $\sigma(\alpha, \delta)$ poziţia adevărată a unui astru pe sfera cerească, iar $\sigma_1(\alpha_1, \delta_1)$ poziţia aparentă a acestuia (fig.4.2). În această situaţie avem (vezi figura):

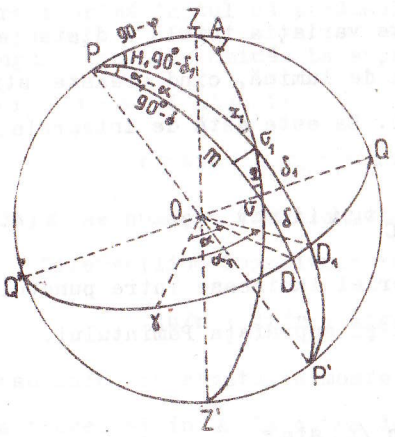

Fig.4.2. Pentru determinarea efectului refracţiei asupra coordonatelor ecuatoriale ale unui astru.

$$\sigma\sigma_1 = z_1 - z = dz = R. \qquad (4.14)$$

În plus, avem:

$$m\sigma_1 = (\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1$$

$$m\sigma = \delta_1 - \delta.$$

Din triunghiul drept unghic $\sigma m \sigma_1$, în care unghiul q se numeşte unghi paralactic şi este presupus cunoscut, şi din formula (4.14) rezultă:

$$m\sigma = \delta_1 - \delta = R\cos q,$$

$$m\sigma_1 = (\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1 = R\sin q.$$

$\alpha_1 - \alpha = d\alpha$

$\delta_1 - \delta = d\delta$

Putem, aşadar, scrie:

$$(d\alpha)'' = (\alpha_1 - \alpha)'' = R''\sin q \sec\delta_1,$$
$$(d\delta)'' = (\delta_1 - \delta)'' = R''\cos q,$$

sau:

$$d\alpha^s = (\alpha_1 - \alpha)^s = (R/15)\sin q \sec\delta_1, \qquad (4.15)$$
$$d\delta'' = (\delta_1 - \delta)'' = R\cos q.$$

Observaţie: Pentru determinarea unghiului q se consideră triunghiul sferic $PZ\sigma_1$, în care unghiul din σ_1 se aproximează cu unghiul q din σ. Aplicînd acestui triunghi formulele lui Gauss, obţinem:

$$\cos z_1 = \sin\varphi\cos\delta_1 + \cos\varphi\cos\delta_1\cos H_1,$$
$$\sin z_1\cos q = \sin\varphi\cos\delta_1 - \cos\varphi\sin\delta_1\cos H_1, \qquad (4.16)$$
$$\sin z_1\sin q = \sin H_1\cos\varphi.$$

Dacă introducem notaţiile:

$$\sin\varphi = m\sin M,$$
$$\cos\varphi\cos H_1 = m\cos M,$$

deducem imediat:

1.0633825 $\varphi = 46.759(4)$

$$= 6.247492 = \mathrm{tg}\,M = \mathrm{tg}\,\varphi/\cos H_1, \quad = 0,1702095 \qquad (4.17)$$
$$m = \cos\varphi\cos H_1/\cos M.$$

Cu notaţiile introduse, sistemul (4.16) devine:

$$\cos z_1 = m\cos(M - \delta_1),$$
$$\sin z_1\cos q = m\sin(M - \delta_1),$$
$$\sin z_1\sin q = \sin H_1\cos\varphi,$$

de unde:

$$\mathrm{tg}\,q = \mathrm{tg}\,H_1\cos M/\sin(M - \delta_1), \qquad (4.18)$$
$$\mathrm{tg}\,z_1 = \mathrm{tg}(M - \delta_1)/\cos q.$$

ERORI:

R Meeus	ε	(în merid.) δ°	ε(″)
		10	0.02
		40	0.002
		45	0.0005
	0.037	0	0.037
		−10	0.084
		−20	0.25
	0.37	−30	1.33

merge şi invers (de la (α, δ) la (α_1, δ_1) cu aceleaşi formule

$\varepsilon = 0.''03$

4.3 Într-o zi, la momentul sideral $\Theta = 18^h43^m46^s,5$, s-a observat din Cluj-Napoca ($\varphi = 46^\circ45'34''$) un obiect cosmic, determinîndu-i-se coordonatele ecuatoriale aparente: $\alpha_1 = 12^h04^m34^s,5$, $\delta_1 = +52^\circ53'05''$. Să se determine corecţiile $d\alpha$, $d\delta$ datorate refracţiei astronomice, ştiind că $dz = R = A\,tg\,z_1$, unde $A = 58'',3$.

Indicaţie: Schema de rezolvare este următoarea:

1) calculul lui H_1: $H_1 = \Theta - \alpha_1 = 6^h39^m12^s,0 \cong 99^\circ48'$;
2) calculul lui M cu formulele (4.17);
3) calculul lui q cu formulele (4.18);
4) calculul lui z_1 cu formulele (4.18);
5) calculul lui $d\alpha^s$ şi $d\delta''$ cu formulele (4.15).

În urma acestor calcule, rezultă:

$$d\alpha^s = 8^s,52\,, \quad d\delta'' = 60'',81\,.$$

4.4 Să se determine paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a Lunii.

Rezolvare: Pe acelaşi meridian terestru, la latitudinile geografice φ_1 şi φ_2, se plasează doi observatori care determină distanţele zenitale topocentrice z_1' şi z_2' ale Lunii (fig.4.3). Dacă p_1' şi p_2' sînt

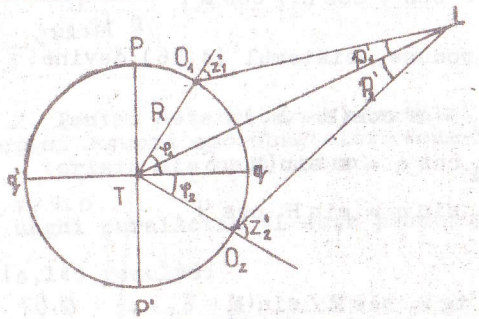

Fig.4.3. Determinarea paralaxei diurne a Lunii.

paralaxele de înălţime ale Lunii pentru observatorii din O_1 şi O_2, atunci din patrulaterul TO_1LO_2 rezultă:

$$\varphi_1 + |\varphi_2| + (180^\circ - z_1') + p_1' + p_2' + (180^\circ - z_2') = 360^\circ\,,$$

sau:

$$p_1' + p_2' = z_1' + z_2' - \varphi_1 - |\varphi_2|\,. \qquad (4.19)$$

În cazul Pămîntului sferic, între paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a Lunii, notată cu $\pi_\mathbb{C} = R/\Delta_\mathbb{C}$ (vezi figura), şi paralaxele de înălţime există relaţiile:

$$p_1' = \pi_\mathbb{C} \sin z_1'\,, \qquad p_2' = \pi_\mathbb{C} \sin z_2'\,. \qquad (4.20)$$

Înlocuind (4.20) în (4.19), se obţine:

$$\pi_\mathbb{C} = (z_1' + z_2' - (\varphi_1 + |\varphi_2|))/(\sin z_1' + \sin z_2')\,. \qquad (4.21)$$

În acest mod se obţine $\pi_\mathbb{C} = 57'02'',7$. Avînd în vedere faptul că raza ecuatorială a Pămîntului este $R_o = 6378{,}2$ km şi că $\pi_\mathbb{C} = R_o/\Delta_\mathbb{C}$, se obţine distanţa medie a Lunii faţă de Pămînt:

$$\Delta_\mathbb{C} = 384\,403 \text{ km}\,.$$

Observaţie: Pentru determinarea paralaxelor diurne ale altor corpuri din sistemul solar se poate folosi tot metoda descrisă mai sus. Ea nu este potrivită în cazul Soarelui, deoarece lumina acestuia încălzeşte lentilele instrumentelor de observare şi, din această cauză, măsurătorile sînt afectate de erori.

4.5 Să se determine paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a Soarelui.

Rezolvare: Se presupune cunoscută paralaxa diurnă orizontală ecuatorială a planetei Marte ($\pi_M \cong 23",28$) şi se consideră situaţia în care Soarele (S) şi Marte (M) sînt în mare opoziţie faţă de Pământ (P), adică opoziţia în care Marte se găseşte la periheliu (fig.4.4).

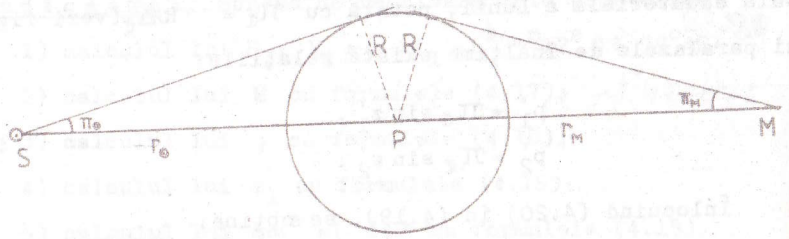

Fig.4.4. Determinarea paralaxei diurne a Soarelui.

Notăm cu: $r_\odot$ - raza orbitei Pământului (presupusă a fi circulară); r_M - distanţa Pământ-Marte la opoziţie; a_M - semiaxa mare a orbitei planetei Marte; e - excentricitatea orbitei lui Marte; $SM = a_M(1-e)$ este distanţa de la periheliul orbitei lui Marte la Soare.

Din fig.4.4 se vede că $R = r_\odot \sin \pi_\odot$ şi $R = r_M \sin \pi_M$, de unde rezultă imediat:

$$r_\odot \sin \pi_\odot = r_M \sin \pi_M . \qquad (4.22)$$

Deoarece paralaxele $\pi_\odot$ şi π_M sînt unghiuri mici, iar $r_M = SM - SP = a_M(1-e) - r_\odot$, rezultă:

$$\pi_\odot = (a_M(1-e)/r_\odot - 1)\pi_M . \qquad (4.23)$$

unde raportul $a_M/r_\odot$ se determină din legea a treia a lui Kepler:

$$a_M/r_\odot = (T_M/T_P)^{2/3} , \qquad (4.24)$$

T_M şi T_P fiind perioadele de revoluţie siderală ale planetei Marte şi respectiv Pământului.

Înlocuind (4.24) în (4.23), avem:

$$\pi_\odot = ((T_M/T_P)^{2/3}(1-e) - 1)\pi_M . \qquad (4.25)$$

În decursul timpului s-au efectuat mai multe determinări ale paralaxei Soarelui, folosindu-se în acest scop şi asteroidul Eros. În 1970 s-a adoptat valoarea $\pi_\odot = 8",794$, care corespunde distanţei Pământ-Soare de $149,6 \cdot 10^6$ km = 1 UA.

4.6 Valoarea raportului dintre diametrul Lunii şi diametrul Pământului este 0,27. Neglijînd distanţa de la Pământ la Lună, să se determine paralaxa Soarelui pentru un observator ce se află pe Lună.

Răspuns: 2",38.

4.7 În momentul opoziţiei, planeta Jupiter se află la distanţa de $628 \cdot 10^6$ km faţă de Pământ. Diametrul său aparent este de 47",2. Să se determine mărimea liniară a razei planetei Jupiter.

Răspuns: 71 400 km.

4.8 Dîndu-se raza Pământului $R_\oplus$, paralaxa diurnă orizontală a unui astru π_x şi diametrul său aparent 2β

(unghiul sub care se vede diametrul acestui astru de către un observator situat în centrul Pământului), să se calculeze raza astrului respectiv şi distanţa pînă la el.

Rezolvare: Să considerăm figura 4.5.

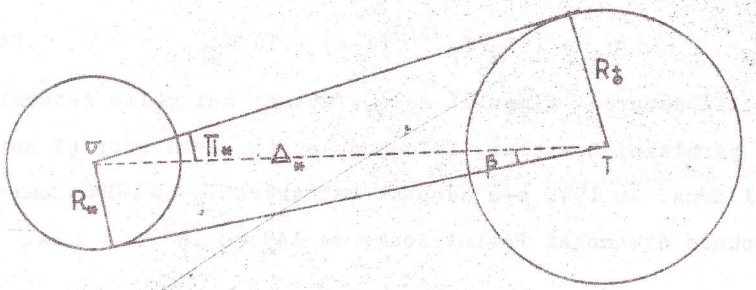

Fig.4.5. Pentru determinarea dimensiunilor şi distanţei unui astru.

Examinînd această figură, se observă că:

$$R_\odot = \Delta_{\mathcal{C}} \sin \pi_{\mathcal{C}} ,$$
$$R_{\mathcal{C}} = \Delta_{\mathcal{C}} \sin \beta ,$$

formule din care deducem cu uşurinţă:

$$R_{\mathcal{C}} = (R_\odot/\pi_{\mathcal{C}}) \sin \beta , \qquad (4.26)$$
$$\Delta_{\mathcal{C}} = R_{\mathcal{C}}/\sin \beta .$$

Aplicaţii: În cazul Lunii, avem $\beta_{\mathcal{C}} = 15',5$ şi $\pi_{\mathcal{C}} = 57'02'',7$. În conformitate cu formulele (4.26), rezultă:

$$R_{\mathcal{C}} = 0,27\, R_\odot = 3476 \text{ km} , \quad \Delta_{\mathcal{C}} = 60,3\, R_\odot .$$

Pentru Soare, $\beta_\odot = 959'',6 \cong 16'$ şi $\pi_\odot = 8'',794$. Conform cu formulele (4.26), rezultă:

$$R_\odot = 109\, R_\odot , \quad \Delta_\odot = 1 \text{ UA} .$$

4.9 Se dă distanţa zenitală aparentă a planetei Venus $z' = 64^\circ 43'$ şi paralaxa diurnă orizontală $p_V = 20''$. Să se determine distanţa zenitală geocentrică a planetei Venus.

Rezolvare: Se ştie că legătura dintre paralaxa de înălţime şi paralaxa diurnă orizontală este dată de:

$$p'_V = p_V \sin z' ,$$

iar distanţa zenitală geocentrică este:

$$z_V = z' - p'_V .$$

În cazul numeric dat obţinem: $p'_V = 18'',08$, de unde:

$$z_V = 64^\circ 42' 41'',92 .$$

4.10 Din două observatoare diferite, A şi B, de pe Pământ se observă în acelaşi timp astrul $\mathcal{C}$ şi se determină distanţele zenitale z_A şi respectiv z_B. Suma celor două paralaxe geocentrice în raport cu cele două observatoare este p. Să se determine distanţa de la astru la centrul Pământului exprimată în raze terestre.

Rezolvare: Schema problemei este reprezentată în fig. 4.6. Examinînd această figură, se observă că:

$$p_1 = (R_\odot/\Delta_{\mathcal{C}}) \sin z_A ,$$
$$p_2 = (R_\odot/\Delta_{\mathcal{C}}) \sin z_B ,$$

relaţii din care se deduce imediat:

$$p = p_1 + p_2 = (R_\odot/\Delta_{\mathcal{C}})(\sin z_A + \sin z_B) .$$

De aici, distanţa geocentrică a astrului $\mathcal{C}$ este dată de:

$$\Delta_\sigma = R_\oplus (\sin z_A + \sin z_B)/p \,. \qquad (4.27)$$

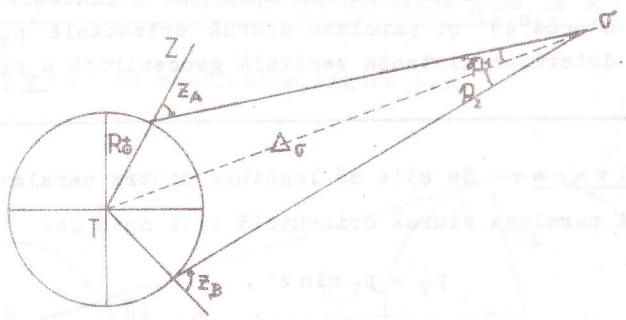

Fig.4.6. Pentru determinarea distanţei unui astru.

Aplicaţie: Presupunem că $z_A = 30^\circ$, $z_B = 45^\circ$, $p = 70'$. Exprimăm mai întîi p în radiani: $p = 70\cdot(\pi/180)/60 = 7\pi/1080$.

Aplicînd acum formula (4.27), se obţine:

$$\Delta_\sigma = ((1+\sqrt{2})\cdot 1080/(2\cdot 7\pi))\, R_\oplus = 59{,}276\, R_\oplus \,.$$

4.11	Să se stabilească formulele pentru determinarea corecţiilor de paralaxă diurnă în coordonate ecuatoriale.

Rezolvare: Fie sistemul de coordonate rectangulare Txyz cu originea în T - centrul Pămîntului, avînd axa Tz îndreptată în direcţia polului nord, axa Tx în direcţia punctului ♈ (punctul vernal), iar axa Ty fiind situată în planul ecuatorului astfel încît sistemul să fie drept. Considerăm un punct M de pe suprafaţa Pămîntului şi fie PMN meridianul locului. Sistemul rectangular de coordonate Mx'y'z' are axele paralele cu axele sistemului Txyz. Fie un astru σ situat la dis-

tanţa Δ faţă de T şi la distanţa Δ' faţă de M (fig.4.7).

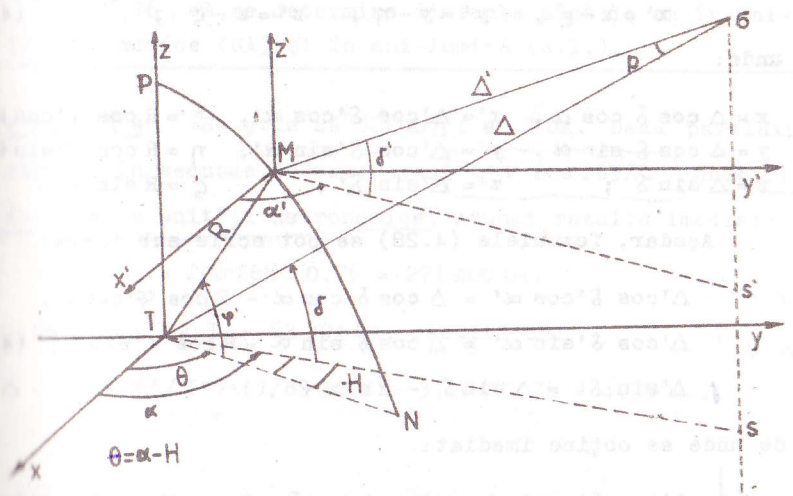

Fig.4.7. Pentru determinarea corecţiilor de paralaxă diurnă.

Acest astru are, în raport cu sistemul rectangular şi polar de coordonate cu centrul în T şi M, respectiv, următoarele coordonate:

(x',y',z') - coordonate rectangulare topocentrice;

(Δ', α', δ') - coordonate polare topocentrice;

(x,y,z) - coordonate rectangulare geocentrice;

(Δ, α, δ) - coordonate polare geocentrice.

Fie M(ξ, η, ζ) şi M(R, θ, φ') coordonatele rectangulare şi respectiv polare ale lui M faţă de sistemele de coordonate cu originea în T (R fiind raza Pămîntului). Putem scrie:

$$\overrightarrow{T\sigma} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{M\sigma} \,,$$

sau, pe componente:

$$x = \xi + x' \,, \quad y = \eta + y' \,, \quad z = \zeta + z' \,,$$

ceea ce duce imediat la:

$$x' = x - \xi\ ,\quad y' = y - \eta\ ,\quad z' = z - \zeta\ , \tag{4.28}$$

unde:

$$\begin{aligned} x &= \Delta\cos\delta\cos\alpha\ , & x' &= \Delta'\cos\delta'\cos\alpha'\ , & \xi &= R\cos\varphi'\cos\theta\ ,\\ y &= \Delta\cos\delta\sin\alpha\ , & y' &= \Delta'\cos\delta'\sin\alpha'\ , & \eta &= R\cos\varphi'\sin\theta\ ,\\ z &= \Delta\sin\delta\ ; & z' &= \Delta'\sin\delta'\ ; & \zeta &= R\sin\varphi'\ . \end{aligned}$$

Aşadar, formulele (4.28) se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} &\Delta'\cos\delta'\cos\alpha' = \Delta\cos\delta\cos\alpha - R\cos\varphi'\cos\theta\ ,\\ &\Delta'\cos\delta'\sin\alpha' = \Delta\cos\delta\sin\alpha - R\cos\varphi'\sin\theta\ ,\\ &\Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta - R\sin\varphi'\ , \end{aligned} \tag{4.29}$$

de unde se obţine imediat:

$$\begin{aligned} &\Delta'\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) = \Delta\cos\delta - R\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha)\ ,\\ &\Delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) = -R\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha)\ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Deoarece $\alpha'-\alpha$ este mic, $\cos(\alpha'-\alpha)\cong 1$ şi atunci prima relaţie din (4.30) împreună cu ultima din (4.29) devin:

$$\begin{aligned} &\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - R\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha)\ ,\\ &\Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta - R\sin\varphi'\ , \end{aligned}$$

din care se obţine:

$$\begin{aligned} &\Delta'\cos(\delta'-\delta) = \Delta - R(\sin\varphi'\sin\delta + \cos\varphi'\cos\delta\cos(\theta-\alpha))\ ,\\ &\Delta'\sin(\delta'-\delta) = -R(\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\sin\delta\cos(\theta-\alpha))\ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Din (4.30) şi (4.31) rezultă:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = -R\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha)/(\Delta\cos\delta + R\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha))\ ,\\ &\operatorname{tg}(\delta'-\delta) = -R(\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\sin\delta\cos(\theta-\alpha))/(\Delta + R(\sin\varphi'\sin\delta + \cos\varphi'\cos\delta\cos(\theta-\alpha)))\ , \end{aligned} \tag{4.32}$$

relaţii care dau corecţiile de paralaxă diurnă $\alpha'-\alpha$ şi $\delta'-\delta$ exprimate în radiani.

4.12 Ştiind că paralaxa stelei Proxima Centauri este $\pi = 0'',76$, să se determine distanţa pînă la ea în unităţi astronomice (UA) şi în ani-lumină (a.l.).

Rezolvare: Se ştie că $\pi = a/\Delta$; $a = 1$ UA. Dacă paralaxa se exprimă în secunde de arc, avem $\pi'' = 206\,265/\Delta$, unde Δ se exprimă în unităţi astronomice. Atunci rezultă imediat:

$$\Delta = 206\,265 / 0{,}76 = 271\,400 \text{ UA}.$$

Deoarece 1 a.l. = 63 304 UA, rezultă că:

$$\Delta = (206\,265/\pi'')\cdot(1/63\,304) = 3{,}26 / 0{,}76 = 4{,}35 \text{ a.l.}$$

4.13 Să se determine corecţiile de paralaxă heliocentrică, atît în coordonate ecuatoriale, cît şi în coordonate ecliptice.

Rezolvare: Se consideră un sistem de axe trirectangular drept, Tx'y'z', cu originea în centrul T al Pămîntului, avînd axa Tx' îndreptată spre punctul vernal, iar planul Tx'y' coincidînd cu planul ecuatorului. Cu centrul în Soare, care este situat în planul eclipticii, se consideră şi un alt sistem de coordonate, Sxyz, avînd axele paralele cu axele sistemului Tx'y'z'. Coordonatele geocentrice ecliptice ale Soarelui sînt $(a, \gamma_\odot, 0)$, unde a este distanţa Pămînt-Soare.

Fie $\mathcal{C}$ o stea situată la distanţa Δ' faţă de Pămînt şi la distanţa Δ faţă de Soare (fig.4.8).

Dacă (α', δ') sînt coordonatele ecuatoriale geocentrice şi (α, δ) coordonatele ecuatoriale heliocentrice ale stelei,

atunci coordonatele sale rectangulare faţă de sistemele cu originile în T şi S sînt respectiv:

$$x' = \Delta' \cos\delta' \cos\alpha', \quad x = \Delta \cos\delta \cos\alpha,$$
$$y' = \Delta' \cos\delta' \sin\alpha', \quad y = \Delta \cos\delta \sin\alpha, \qquad (4.33)$$
$$z' = \Delta' \sin\delta'; \quad z = \Delta \sin\delta.$$

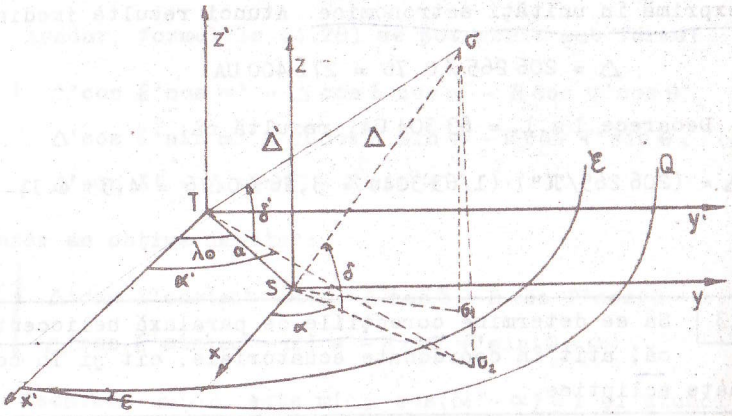

Fig.4.8. Pentru determinarea corecţiilor de paralaxă heliocentrică.

Coordonatele geocentrice ale Soarelui sînt:

$$\xi = a\cos\lambda_\odot, \quad \eta = a\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon, \quad \zeta = a\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon. \qquad (4.34)$$

Din fig.4.8 se observă că:

$$\overrightarrow{T\sigma} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{S\sigma},$$

sau:

$$\Delta'\cos\delta'\cos\alpha' = \Delta\cos\delta\cos\alpha + a\cos\lambda_\odot,$$
$$\Delta'\cos\delta'\sin\alpha' = \Delta\cos\delta\sin\alpha + a\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon, \qquad (4.35)$$
$$\Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta + a\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon,$$

de unde, prin calcule simple, se obţine:

$$0 = \Delta\cos\delta\sin(\alpha'-\alpha) + a(\sin\alpha'\cos\lambda_\odot - \cos\alpha'\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon),$$
$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta\cos(\alpha'-\alpha) + a(\cos\alpha'\cos\lambda_\odot + \qquad (4.36)$$
$$+ \sin\alpha'\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon).$$

Efectele foarte mici ale paralaxei anuale permit să aproximăm pe $\sin(\alpha'-\alpha)$ cu $\alpha'-\alpha$ şi pe $\cos(\delta'-\delta)$ cu 1. Din prima relaţie (4.36) rezultă:

$$\alpha'-\alpha = -(a/\Delta)\sec\delta\,(\sin\alpha'\cos\lambda_\odot - \cos\alpha'\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon), \qquad (4.37)$$

iar din ultima relaţie (4.35) împreună cu a doua relaţie din (4.36) se obţine uşor:

$$\delta'-\delta = -(a/\Delta)(\cos\alpha'\sin\delta'\cos\lambda_\odot + \sin\alpha'\sin\delta'\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon -$$
$$- \cos\delta'\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon). \qquad (4.38)$$

Formulele (4.37) şi (4.38) dau corecţiile de paralaxă heliocentrică în coordonate ecuatoriale.

Deoarece $a/\Delta = \pi$ este mic, α' şi δ' sînt foarte aproape de α şi δ respectiv; rezultă că valorile trigonometrice ale funcţiilor sinus şi cosinus aplicate coordonatelor geocentrice α' şi δ' pot fi aproximate cu valorile corespunzătoare cînd ele se aplică coordonatelor heliocentrice α şi δ. Atunci formulele (4.37) - (4.38) se scriu sub forma:

$$\alpha'-\alpha = -\pi\sec\delta\,(\sin\alpha\cos\lambda_\odot - \cos\alpha\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon), \qquad (4.39)$$
$$\delta'-\delta = -\pi(\cos\alpha\sin\delta\cos\lambda_\odot + \sin\alpha\sin\delta\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon -$$
$$- \cos\delta\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon),$$

care reprezintă corecţiile de paralaxă anuală în coordonate ecuatoriale, exprimate în aceleaşi unităţi ca şi paralaxa π.

Dacă planul Tx'y' este ales în planul eclipticii, adică

punem $\varepsilon = 0$, atunci coordonatele (α', δ') şi (α, δ) se transformă respectiv în (λ', β') şi (λ, β), iar formulele (4.39) devin:

$$\lambda' - \lambda = -\pi \sec\beta \sin(\lambda - \lambda_\odot) ,$$
$$\beta' - \beta = -\pi \sin\beta \cos(\lambda - \lambda_\odot) , \qquad (4.40)$$

care reprezintă corecţiile de paralaxă anuală în coordonate ecliptice.

4.14 Să se determine locul geometric al poziţiilor aparente (geocentrice) σ' ale unei stele în decurs de un an în jurul poziţiei sale adevărate (heliocentrice) σ.

Rezolvare: Fie $\Pi\sigma$ meridianul ecliptic al poziţiei heliocentrice σ prin care este figurat şi traseul paralelului ecliptic (fig. 4.9). Se consideră sistemul de axe rectangulare $\sigma\xi\eta$, sensul pozitiv $\sigma\xi$ fiind direcţia est a paralelului şi $\sigma\eta$ direcţia nord a meridianului ecliptic. În acest sistem de axe, coordonatele rectangulare ale unei poziţii aparente (geocentrice) sînt următoarele:

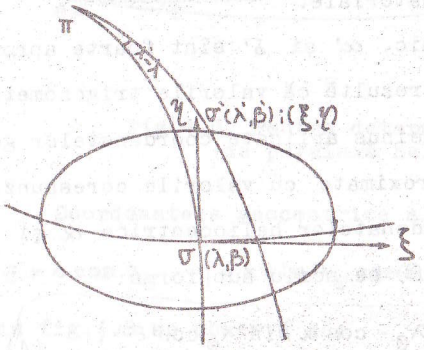

Fig.4.9. Elipsa de paralaxă anuală.

$$\xi = (\lambda' - \lambda)\cos\beta ,$$
$$\eta = \beta' - \beta . \qquad (4.41)$$

Ţinînd seama şi de relaţiile (4.40), se obţine:

$$\xi = -\pi \sin(\lambda - \lambda_\odot) ,$$
$$\eta = -\pi \sin\beta \cos(\lambda - \lambda_\odot) . \qquad (4.42)$$

Eliminînd parametrul $\lambda - \lambda_\odot$ între cele două ecuaţii de mai sus, rezultă:

$$\xi^2/\pi^2 + \eta^2/(\pi^2 \sin^2\beta) = 1 , \qquad (4.43)$$

care reprezintă ecuaţia unei elipse cu semiaxele π şi $\pi \sin\beta$ numită elipsa de paralaxă anuală a stelei.

În relaţiile (4.42) numai parametrul $\lambda_\odot$ variază în decursul unui an de la 0° la 360°. Mişcarea poziţiei aparente pe elipsa de paralaxă anuală se efectuează în sens direct, ca şi mişcarea Pămîntului pe orbita sa circumsolară, iar poziţia aparentă a stelei diferă cu 180° de poziţia Pămîntului pe orbita sa.

Elipsa de paralaxă anuală este o dovadă a mişcării de revoluţie a Pămîntului în jurul Soarelui.

4.15 Să se determine expresiile corecţiilor de aberaţie anuală în coordonate ecuatoriale.

Indicaţie: Fie (α, δ) coordonatele ecuatoriale ale poziţiei adevărate a stelei σ şi (α', δ') coordonatele ecuatoriale ale poziţiei aparente σ', cauzată de aberaţia anuală.

Se consideră (fig.4.10) sistemul trirectangular drept de coordonate Sxyz, avînd originea S în centrul Soarelui, axa Sx îndreptată în direcţia punctului vernal, planul Sxy este planul ecuatorului, iar axa Sz coincide cu axa polilor e-

cuatorului terestru. Centrul Pământului, T(x,y,z), este situat în planul eclipticii, la distanţa r de Soare. $\vec{V}$ este vectorul rezultant al compunerii vitezelor $\vec{c}$ (viteza luminii) şi $\vec{v}$ (viteza de deplasare a Pământului în mişcarea sa de revoluţie în jurul Soarelui).

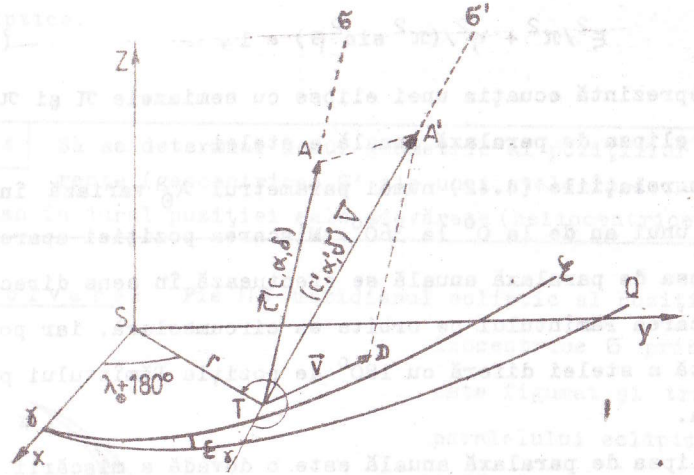

Fig.4.10. Pentru determinarea corecţiilor de aberaţie anuală.

Din fig.4.10 rezultă relaţia: $\overrightarrow{TA'} = \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DA'}$. Prin înmulţiri cu factori convenabili ale relaţiilor rezultate din proiectarea pe axele de coordonate a relaţiei vectoriale de mai sus, se ajunge la formulele:

$$\alpha' - \alpha = -(v/c)\sec\delta\,(\sin\alpha\sin\lambda_\odot + \cos\alpha\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon), \qquad (4.44)$$

$$\delta' - \delta = -(v/c)(\sin\delta\cos\alpha\sin\lambda_\odot + (\cos\delta\sin\varepsilon - \sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon)\cos\lambda_\odot),$$

care reprezintă corecţiile de aberaţie anuală căutate.

4.16 Să se stabilească corecţiile de aberaţie anuală în coordonate ecliptice.

Rezolvare: Conform figurii 4.10, dacă $\varepsilon = 0$, $\vec{c}(c, \lambda, \beta)$ şi $\vec{V}(V, \lambda', \beta')$, atunci $\vec{v}(v\sin\lambda_\odot, -v\cos\lambda_\odot, 0)$.

Proiectînd relaţia vectorială $\vec{V} = \vec{c} + \vec{v}$ pe axele de coordonate, se obţine:

$$\begin{aligned} V\cos\beta'\cos\lambda' &= c\cos\beta\cos\lambda + v\sin\lambda_\odot, \\ V\cos\beta'\sin\lambda' &= c\cos\beta\sin\lambda - v\cos\lambda_\odot, \\ V\sin\beta' &= c\sin\beta, \end{aligned} \qquad (4.45)$$

sistem din care, după calcule simple, se obţine:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -(v/c)\sec\beta\cos(\lambda_\odot - \lambda'), \\ \beta' - \beta &= -(v/c)\sin\beta'\sin(\lambda_\odot - \lambda'). \end{aligned} \qquad (4.46)$$

Mărimea $K = v/c$ (în radiani) se numeşte constanta aberaţiei. Avînd în vedere faptul că:

$$\sin(\lambda_\odot - \lambda') \cong \sin(\lambda_\odot - \lambda), \quad \cos(\lambda_\odot - \lambda') \cong \cos(\lambda_\odot - \lambda),$$

relaţiile (4.46) devin:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -K\sec\beta\cos(\lambda_\odot - \lambda), \\ \beta' - \beta &= -K\sin\beta\sin(\lambda_\odot - \lambda). \end{aligned} \qquad (4.47)$$

care reprezintă corecţiile de aberaţie anuală în coordonate ecliptice.

4.17 Să se determine ecuaţia traiectoriei poziţiei aparente σ' datorită aberaţiei anuale.

Rezolvare: Deoarece în (4.47) numai $\lambda_\odot$ variază în de-

cursul unui an de la 0° la 360°, rezultă că poziţia aparentă $\sigma'(\lambda', \beta')$ va descrie o curbă închisă în jurul poziţiei adevărate σ.

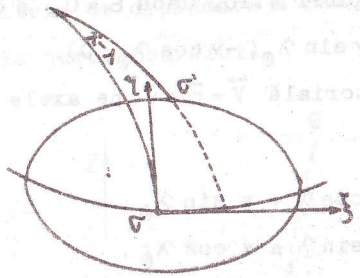

Fig.4.11. Elipsa de aberaţie anuală.

Dacă se consideră (fig.4.11) meridianul şi paralelul ecliptic care trec prin σ' şi sistemul rectangular de coordonate $\sigma\xi\eta$ cu axa $\sigma\xi$ în direcţia est a paralelului ecliptic, iar $\sigma\eta$ în direcţia nord a meridianului ecliptic, atunci poziţia aparentă σ' are următoarele coordonate:

$$\xi = (\lambda' - \lambda)\cos\beta\,, \qquad \eta = \beta' - \beta\,. \tag{4.48}$$

Înlocuind (4.47) în (4.48), se obţine:

$$\xi^2/K^2 + \eta^2/(K^2\sin^2\beta) = 1\,, \tag{4.49}$$

care reprezintă ecuaţia elipsei de aberaţie anuală. Se poate constata uşor că această elipsă este rotită cu 90° în sens direct faţă de elipsa orbitei terestre.

C A P I T O L U L V

TIMPUL ŞI MĂSURAREA LUI

5.1 Din Cluj-Napoca s-a observat un satelit artificial al Pământului la momentul $t = 17^h35^m43^s,2$. Care a fost momentul sideral al observaţiei, ştiind că longitudinea localităţii Cluj-Napoca este $L = +1^h34^m23^s,46$, iar timpul sideral la miezul nopţii mijlocii la Greenwich (0^h TU) a fost $\theta_{0G} = 1^h13^m32^s,6$?

Rezolvare: Relaţia fundamentală dintre timpul mediu şi timpul sideral este:

$$1 \text{ an tropic} = 365,2422 \text{ z.m.} = 366,2422 \text{ z.s.} \qquad (5.1)$$

(unde z.m. înseamnă zi medie, iar z.s. - zi siderală). Notînd $\mu = 1 \text{ z.s.}/1 \text{ z.m.} = 365,2422 / 366,2422$, rezultă:

$$1 \text{ z.m.} = 1/\mu \text{ z.s.} = 1 + 1/365,2422 \text{ z.s.}, \qquad (5.2)$$

sau:

$$\begin{aligned} 1 \text{ z.m.} &= 1 \text{ z.s.} + 3^m56^s,555 \text{ u.s. (unităţi siderale)}, \\ 1^{h.m.} &= 1^{h.s.} + 9^s,856 \text{ u.s.}, \\ 1^{m.m.} &= 1^{m.s.} + 0^s,164 \text{ u.s.}, \\ 1^{s.m.} &= 1^{s.s.} + 0^s,003 \text{ u.s.} \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Relaţia inversă relaţiei (5.2) este:

$$1 \text{ z.s.} = \mu \text{ z.m.} = 1 - 1/366,2422 \text{ z.m.}, \qquad (5.4)$$

sau:

$$\begin{aligned} 1 \text{ z.s.} &= 1 \text{ z.m.} - 3^m55^s,909 \text{ u.m. (unităţi medii)}, \\ 1^{h.s.} &= 1^{h.m.} - 9^s,830 \text{ u.m.}, \\ 1^{m.s.} &= 1^{m.m.} - 0^s,164 \text{ u.m.}, \end{aligned} \qquad (5.5)$$

$$1^{s.s.} = 1^{s.m.} - 0^s,003 \text{ u.m.}$$

România aflîndu-se în cel de-al doilea fus orar, legătu ra dintre timpul său mediu t_m şi timpul universal TU (timpu mediu de la Greenwich) este dată de relaţia:

$$TU = t_m - 2^h . \qquad (5.6$$

Dacă într-un anumit loc de pe Pămînt momentului mediu t îi corespunde momentul sideral θ, iar miezului nopţii mijlo cii (medii) îi corespunde momentul sideral θ_o, atunci inter valului de timp mediu $t - 0$ îi corespunde intervalul de tim sideral $\theta - \theta_o$. Rezultă că:

$$t_m - 0 = (\theta - \theta_o)\mu . \qquad (5.7$$

Pentru observatorul din Greenwich, relaţia (5.7) devine:

$$t_{mG} = TU = \mu(\theta_G - \theta_{oG}) , \qquad (5.8$$

de unde:

$$\theta_G = (1/\mu)\,TU + \theta_{oG} . \qquad (5.9$$

Legătura dintre diferenţa de timp pentru două localităţi corespunzînd aceluiaşi moment fizic, şi diferenţa longitudi lor lor geografice este dată de:

$$H_A - H_B = L_A - L_B , \qquad (5.10$$

care, scrisă pentru timpul sideral, unde localitatea A est Cluj-Napoca, iar localitatea B este Greenwich, devine:

$$\theta_{Cj} - \theta_G = L_{Cj} - L_G , \qquad (5.11$$

sau:

$$\theta_{Cj} = \theta_G + L_{Cj} . \qquad (5.12$$

Formulele (5.6), (5.9) şi (5.12) rezolvă problema prop

să a trecerii de la timpul mediu la timpul sideral.

În cazul numeric dat, avem:

$$TU = 17^h35^m43^s,2 - 2^h = 15^h35^m43^s,2 .$$

$$(1/\mu)\,TU = (1/\mu)\cdot 15^h + (1/\mu)\cdot 35^m + (1/\mu)\cdot 43^s,2 =$$

$$= 15 \cdot (1^h09^s,856) + 35 \cdot (1^m00^s,164) + 43,2 \cdot (1^s,003) =$$

$$\begin{array}{r} = 15^h02^m27^s,84 + \\ 35^m05^s,74 \\ 43^s,13 \\ \hline = 15^h38^m16^s,91 . \end{array}$$

Din (5.9) rezultă:

$$\theta_G = 15^h38^m16^s,91 + 1^h13^m32^s,6 = 16^h51^m49^s,51 ,$$

iar pe baza relaţiei (5.12) obţinem:

$$\theta_{Cj} = 16^h51^m49^s,51 + 1^h34^m23^s,46 = 18^h26^m12^s,97 .$$

5.2 La Cluj-Napoca s-a determinat timpul sideral, observîndu-se trecerea la meridian a unei stele avînd asensia dreaptă $\alpha = 5^h05^m42^s,03$. Care a fost momentul de timp mediu corespunzător observaţiei, ştiind că timpul sideral la 0^h TU era $\theta_{oG} = 2^h24^m30^s,5$, iar longitudinea localităţii Cluj-Napoca este $L_{Cj} = 1^h34^m23^s,46$?

Rezolvare: Se ştie că $\theta = \alpha + H$. În momentul trecerii la meridian, $H = 0$ şi atunci $\theta_{Cj} = \alpha = 5^h05^m42^s,03$.

Trecerea de la timpul sideral la timpul mediu este realizată prin intermediul formulelor (5.12), (5.8) şi (5.6). Din (5.12) rezultă:

$$\theta_G = \theta_{Cj} - L_{Cj} = 3^h31^m18^s,57 .$$

$$\theta_G - \theta_{oG} = 1^h06^m48^s,07 .$$

În conformitate cu (5.8), avem:

$$TU = (1^h06^m48^s,07)\cdot\mu = 1^h06^m37^s,28 ,$$

iar din (5.6) rezultă că timpul mediu corespunzător observației a fost:

$$t_{m\,Cj} = TU + 2^h = 3^h06^m37^s,28 .$$

5.3 La Tokyo timpul solar mijlociu este $t_{\odot m} = 19^h53^m14^s,5$. Să se determine:

a) timpul fusului la Tokyo, știind că $L_T = 9^h19^m00^s,0\,E$ și $n = 9$;

b) timpul legal român corespunzător;

c) timpul sideral corespunzător la Cluj-Napoca în ziua de 17 octombrie 1973 ($L_{Cj} = 1^h34^m23^s,5\,E$ și $\theta_{oG} = 1^h41^m25^s,2$).

Rezolvare: a) Pentru determinarea timpului fusului la Tokyo, se aplică formula:

$$T_n = t_{\odot m} + (n \pm L) ,$$

unde semnul + se ia pentru longitudini vestice, iar semnul − se ia pentru longitudini estice. Avem succesiv:

$$L_T = 9^h19^m00^s,0 ,$$
$$n = 9 ,$$
$$n - L_T = -0^h19^m00^s,0 ,$$
$$t_{\odot m} = 19^h53^m14^s,5 ,$$
$$T_n = 19^h34^m14^s,5 .$$

b) Pentru determinarea timpului legal român corespunzător se aplică formula următoare:

$$T_m = T_n + (m - n) .$$

În cazul nostru, $m = 2$, $n = 9$. Se deduce imediat:

$$T_2 = 12^h34^m14^s,5 .$$

c) Pentru a trece de la T_2 la θ_{Cj} pentru data de 17 octombrie 1973, raționamentul logic al transformării este:

$$T_2 = 12^h34^m14^s,5$$
$$T_o = 10^h34^m14^s,5$$
$$\Delta m = 1^m44^s,2$$
$$\theta_o = 10^h35^m58^s,7$$
$$\theta_{oG} = 1^h41^m25^s,2$$
$$\theta = 12^h17^m23^s,9$$
$$L_{Cj} = 1^h34^m23^s,5$$
$$\theta_{Cj} = 13^h51^m47^s,4$$

Observație: Corecția Δm a fost calculată, pornind de la T_o, pe baza tabelului transformării unui interval de timp, exprimat în unități de timp mediu, în unități de timp sideral, astfel:

10^h . . . . . $1^m38^s,6$
34^m . . . . . $5^s,6$
$14^s,5$ . . . . . $0^s,0$

$\Delta m = 1^m44^s,2$

5.4 Două stele cunoscute, $\mathcal{E}(\alpha, \delta)$ și $\mathcal{E}'(\alpha', \delta')$, observate dintr-un loc de latitudine φ, ating o aceeași distanță zenitală la momentele siderale θ și, respectiv, θ'. Să se calculeze această distanță zenitală, precum și latitudinea locului de observare.

Rezolvare: Problema este reprezentată schematic în fig. 5.1. Se consideră triunghiurile de poziţie PZG şi PZG'. Aplicînd prima formulă fundamentală a trigonometriei sferice (formula cosinusului a lui Gauss) în aceste două triunghiuri de poziţie, obţinem următoarele relaţii:

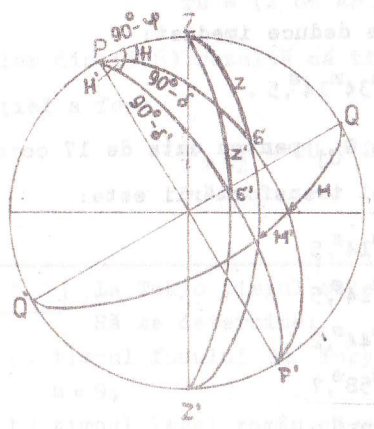

Fig.5.1. Pentru calculul distanţei zenitale a unui astru şi al latitudinii locului de observare.

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H, \qquad (5.13)$$
$$\cos z' = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos H',$$

unde $z = z'$. Ţinînd seama de acest fapt, pe baza formulelor (5.13), se deduce imediat:

$$\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos H'.$$

Împărţind această relaţie prin $\cos\varphi$, se obţine:

$$\operatorname{tg}\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = \cos\delta' \cos H' - \cos\delta \cos H,$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\varphi = (\cos\delta' \cos H' - \cos\delta \cos H)/(\sin\delta - \sin\delta'). \qquad (5.14)$$

Prima dintre formulele (5.13) împreună cu (5.14) rezolvă problema dată.

Observaţie: Pentru determinarea lui H şi H' se aplică cunoscuta formulă care leagă timpul sideral de unghiul orar şi de ascensia dreaptă.

5.5 Două stele de coordonate ecuatoriale cunoscute au, în acelaşi moment (fizic), aceeaşi înălţime. Care este valoarea timpului sideral în momentul respectiv?

Rezolvare: Dacă stelele $G_1(\alpha_1, \delta_1)$ şi $G_2(\alpha_2, \delta_2)$ au aceeaşi înălţime, atunci şi distanţele lor zenitale sînt egale, adică $z_1 = z_2$, ceea ce duce la: $\cos z_1 = \cos z_2$.

Din formula cosinusurilor aplicată triunghiurilor sferice de poziţie PZG_1 şi PZG_2 rezultă în acest caz:

$$\sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos H_1 = \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cos H_2; \qquad (5.15)$$

$$\cos\varphi(\cos\delta_1 \cos H_1 - \cos\delta_2 \cos H_2) = \sin\varphi(\sin\delta_2 - \sin\delta_1). \qquad (5.16)$$

Punînd condiţia $\cos\varphi \neq 0$ (adică $\varphi \neq 90^\circ$), obţinem, prin împărţirea relaţiei (5.16) cu $\cos\varphi$, egalitatea:

$$\cos\delta_1 \cos H_1 - \cos\delta_2 \cos H_2 = 2 \operatorname{tg}\varphi \cos((\delta_1 + \delta_2)/2) \sin((\delta_2 - \delta_1)/2),$$

din care trebuie să eliminăm pe H_1 şi H_2.

Timpul sideral în momentul observaţiei simultane este:

$$\theta = H_1 + \alpha_1 = H_2 + \alpha_2,$$

de unde rezultă imediat:

$$H_1 = \theta - \alpha_1, \quad H_2 = \theta - \alpha_2.$$

Introducînd notaţia: $x = \theta - \alpha_1$ (de unde rezultă imediat $\theta = x + \alpha_1$), putem scrie:

$$x + (\alpha_1 - \alpha_2) = \theta - \alpha_2.$$

După transformări simple şi introducînd, în plus, notaţiile:

$$a = \cos\delta_1 - \cos\delta_2\cos(\alpha_1-\alpha_2),$$
$$b = \cos\delta_2\sin(\alpha_1-\alpha_2),$$
$$c = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin((\delta_2-\delta_1)/2)\cos((\delta_1+\delta_2)/2),$$

problema revine la rezolvarea următoarei ecuaţii trigonometrice:

$$a\sin x + b\cos x = c, \qquad (5.17$$

ecuaţie trigonometrică de tipul liniar, pentru a cărei rezolvare există - după cum se ştie din trigonometrie - mai multe metode.

Soluţia generală a acestei ecuaţii este:

$$x = (-1)^k \arcsin((c/a)\cos\beta) + k\pi - \beta, \qquad (5.18$$

unde $\beta = \mathrm{arctg}(b/a)$, $k \in \mathbb{Z}$; atunci:

$$\theta = (-1)^k \arcsin((c/a)\cos\beta) + k\pi - \beta + \alpha_1. \qquad (5.19$$

Discuţie: Deosebim, după valorile lui φ, cîteva cazuri

1) $\varphi = 0^\circ$ (ecuator); corespunde cazului $a^2+b^2=c^2$. Atunci avem $\arcsin((c/a)\cos\beta) = 0$ şi ecuaţia devine o ecuaţie cu soluţia generală: $\theta = k\pi - \beta + \alpha_1$, cu $\beta = \mathrm{arctg}(b/a)$ şi $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz, ecuaţia admite $1\cdot\infty$ soluţii reale.

2) $\varphi = 90^\circ$ (pol); corespunde cazului $a^2+b^2<c^2$. Formula nu are sens în acest caz, ea fiind dedusă cu condiţia (pusă la început) $\varphi \neq 90^\circ$. Aşadar, în cazul de faţă, ecuaţia nu admite soluţii reale.

3) $0^\circ < \varphi < 90^\circ$; corespunde cazului $a^2+b^2>c^2$. Acum ecuaţia are $2\cdot\infty$ soluţii reale. Se aplică în acest caz formula

obţinută în forma sa generală.

5.6 Cunoscînd direcţia meridianei şi declinaţia Soarelui la un moment dat, să se determine ora locală, utilizînd pentru aceasta umbra lăsată de un stîlp vertical de lungime ℓ.

Rezolvare: Să considerăm fig.5.2. Din triunghiul dreptunghic COB putem scrie:

$$\mathrm{tg}\,\hat{C} = \ell/OC.$$

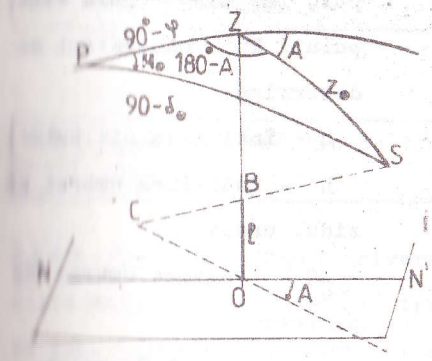

Fig.5.2. Pentru determinarea orei locale.

Se mai observă că:

$$\hat{C} = h_\odot.$$

În triunghiul sferic de poziţie PZS (S - Soarele) se cunoaşte $\delta_\odot$ şi latura ZS:

$$ZS = z_\odot = 90^\circ - h_\odot.$$

Aplicînd în acest triunghi sferic teorema sinusurilor, se obţine:

$$\sin H_\odot/\sin z_\odot = \sin A_\odot/\sin(90^\circ - \delta_\odot),$$

sau:

$$\sin H_\odot = (\sin A_\odot/\cos\delta_\odot)\cos\hat{C}.$$

Dacă unghiul orar al Soarelui, $H_\odot$, este cunoscut, atunci timpul mediu este dat de relaţia:

$$t_m = H_\odot + E + 12^h,$$

unde prin E s-a notat ecuaţia timpului.

5.7 Un acuzat de comiterea unei crime într-o zi cunoscută, la o oră cunoscută, aduce ca dovadă a nevinovăţiei sale o fotografie a sa făcută în faţa unei case din alt oraş. Pe fotografie se vede umbra lăsată de un stîlp de telegraf, atît pe teren, cît şi pe zidul casei. Cum se poate verifica faptul că fotografia a fost făcută în ziua şi la ora la care s-a săvîrşit crima ?

Rezolvare: Situaţia este reprezentată schematic în fig. 5.3, în care AB este stîlpul, iar ACD - umbra stîlpului. Prin măsurători se determină:

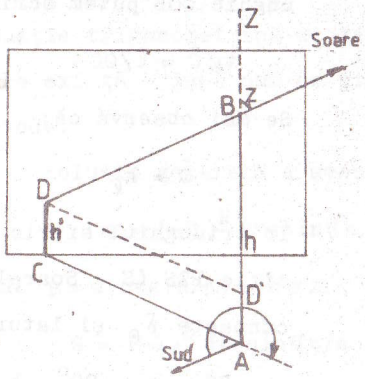

Fig.5.3. Pentru determinarea datei şi orei după umbră.

h - înălţimea stîlpului;

h' - înălţimea umbrei pe zidul casei;

AC - lungimea umbrei de pe teren;

$\hat{A}$ - azimutul Soarelui, după ce s-a stabilit meridiana punctului A cu ajutorul unei busole.

Din triunghiul DD'B putem scrie:

$$tg\, z = DD'/D'B = AC/(h-h') .$$

Coordonatele orizontale ale Soarelui (A,z) astfel determinate se transformă în coordonate orare ($H_\odot$, $\delta_\odot$). Din Anuarul astronomic se scoate ziua în care Soarele a avut declinaţia calculată.

Timpul mediu corespunzător momentului efectuării fotografiei este dat de relaţia:

$$t_m = H_\odot + E + 12^h ,$$

unde E este ecuaţia timpului.

Aşadar, pe baza datelor oferite de fotografie, se poate determina momentul (data şi ora) luării fotografiei.

5.8 Să se reprezinte grafic „ecuaţia timpului":

$$E = t_m - t_a ,$$

folosind datele numerice din Anuarul Astronomic pentru anul 1986. Discuţie.

5.9 Care sînt scările de timp folosite astăzi în astronomie ?

Răspuns: a) Timpul universal (TU). Dacă se cere o precizie mai bună decît $0^s,01$, trebuie specificată forma în care este folosit (TUO = timpul solar mediu, obţinut direct din observaţii astronomice; TU1 = TUO corectat de efectele micilor mişcări ale Pămîntului relativ la axa sa de rotaţie; în sfîrşit, TU2 = TU1 corectat de efectele micilor fluctuaţii neregulare în viteza de rotaţie a Pămîntului).

b) Timpul efemeridelor (TE), timpul dinamic terestru (TDT) şi timpul dinamic baricentric (TDB). Scara TE a fost înlocuită începînd din 1984 cu scara TDT, apropiată de TE, dar a cărei unitate fundamentală este secunda internaţională SI. Practic, scara TDT se obţine din timpul atomic internaţional (TAI) prin relaţia:

$$TDT = TAI + 32^s,184 .$$

Timpul dinamic baricentric (TDB) este egal cu timpul dinamic terestru (TDT) plus termeni relativişti.

c) Timpul atomic internaţional (TAI). Unitatea sa de măsură este secunda internaţională SI redusă la nivelul mării. TAI se dă sub forma unei scări continue începînd cu 1 ianuarie 1958.

d) Timpul universal coordonat (TUC). Această scară de timp formează baza difuzării coordonate a frecvenţelor standard şi a semnalelor orare. Ea este ajustată prin salturi (pozitive sau negative) de o secundă, pentru a i se asigura concordanţa cu TU1, corecţiile aplicîndu-se fie la 1 ianuarie, fie la 1 iulie.

(Pentru informaţii mai detaliate asupra scărilor de timp utilizate în astronomie, vezi „Anuarul Astronomic '86", Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1985.)

CAPITOLUL VII

MECANICĂ CEREASCĂ

7.1 Să se determine acceleraţia gravitaţională imprimată de planeta Jupiter satelitului său Europa, aflat la distanţa medie de $670{,}9 \cdot 10^3$ km de planetă, ştiind că masa lui Jupiter este de 318 ori mai mare decît masa Pămîntului, raza medie a Pămîntului este de 6371 km, iar acceleraţia căderii libere la suprafaţa lui - de 981 cm/s^2. (Diminuarea acceleraţiei gravitaţionale pe seama rotaţiei corpurilor se neglijează în această problemă.)

Rezolvare: Potrivit cu legea atracţiei universale, la suprafaţa unui corp de formă sferică (de rază R) şi re repartiţie sferică a masei lui ($\mathcal{M}$) acceleraţia gravitaţională se exprimă (în ipoteza menţionată în enunţ) prin formula:

$$g = G\mathcal{M}/R^2 , \qquad (7.1)$$

G fiind constanta atracţiei universale.

La suprafaţa Pămîntului, această formulă dă:

$$g_o = G\mathcal{M}_o/R_o^2 = 981 \text{ cm/s}^2 ,$$

cu semnificaţia evidentă a notaţiilor folosite.

Împărţind prima egalitate la cea de-a doua, obţinem:

$$g = g_o\mathcal{M}/R^2 ,$$

formulă în care masa $\mathcal{M}$ este exprimată în mase terestre, iar raza R în raze terestre.

În cîmpul gravitaţional al planetei (în cazul nostru, Jupiter), la o distanţă oarecare (r) de centrul acesteia, ac-

celeraţia gravitaţională se exprimă prin formula:

$$g_r = G\mathcal{M}/r^2 ,$$

sau, ţinînd cont de relaţia (7.1), prin formula:

$$g_r = g/(r/R)^2 = gR^2/r^2 ,$$

în care distanţele r şi R se pot exprima în orice unităţi de lungime (dar, obligatoriu, în aceleaşi !).

În cazul nostru, avem:

$$g_r = gR^2/r^2 = g_o(\mathcal{M}/R^2)R^2/r^2 = g_o\mathcal{M}/r^2 ,$$

unde distanţa r este exprimată în raze terestre, masa $\mathcal{M}$ în mase terestre, adică în aceleaşi unităţi de măsură ca şi în cea de-a treia formulă.

Folosind datele numerice ale problemei, obţinem:

$$g_r = 981 \cdot 318/(670{,}9 \cdot 10^3/6371)^2 = 28{,}1 \text{ cm/s}^2 .$$

7.2 Să se calculeze acceleraţia gravitaţională a sateliţilor galileeni Io şi Callisto, ai lui Jupiter, care evoluează în jurul planetei la distanţe medii de 5,92 şi 26,41 unităţi de rază a planetei. Masa lui Jupiter este de 318, iar raza - de 10,9 (în unităţi „terestre").

Răspuns: 75 cm/s^2 şi 3,76 cm/s^2.

7.3 Să se calculeze acceleraţia căderii libere la suprafaţa planetelor Venus şi Marte, precum şi a asteroidului Ceres. Masele şi razele acestora, în comparaţie cu cele similare ale Pămîntului, sînt, respectiv: 0,815 şi 0,950; 0,107 şi 0,533; $28{,}9 \cdot 10^{-5}$ şi 0,0784.

Răspuns: 8,86 (m/s^2), 3,70 (m/s^2) şi 0,46 (m/s^2).

7.4 Masa Lunii este de 81,3 ori, iar diametrul ei - de 3,67 ori mai mici decît mărimile similare ale Pămîntului. De cîte ori greutatea unui astronaut este mai mică pe Lună decît pe Pămînt ?

Răspuns: De 6 ori.

7.5 Să se calculeze acceleraţia căderii libere la suprafaţa Soarelui şi a planetei Saturn, ale căror raze şi densităţi medii, exprimate în unităţi similare „terestre", sînt, respectiv: 109,1 şi 0,255; 9,08 şi 0,127 .

Răspuns: 273 (m/s^2) şi 11,3 (m/s^2).

7.6 Cum s-ar modifica acceleraţia căderii libere la suprafaţa unei planete, în ipoteza că raza planetei ar creşte de m ori, iar densitatea medie ar creşte de n ori ? Dar în cazul particular m = n ?

Răspuns: $\sqrt[3]{m \cdot n^2}$ şi m .

7.7 Care ar fi valoarea acceleraţiei gravitaţionale la suprafaţa Soarelui, dacă, prin păstrarea masei, diametrul lui ar creşte pînă la raza orbitei terestre ? Se ştie că masa Soarelui este de 333 000 ori mai mare decît masa Pămîntului, diametrul solar fiind de 1 392 000 km.

Răspuns: 0,59 (cm/s^2).

7.8 Să se calculeze accelerația gravitațională a Pământului în cîmpul gravitațional al Soarelui, pe baza datelor din problema precedentă. Ce concluzie directă se poate trage din rezultatul obținut, comparîndu-l cu rezultatul din problema precedentă?

Răspuns: 0,59 (cm/s^2). Formularea concluziei la care am făcut referire o lăsăm pe seama cititorului.

7.9 Să se determine poziția centrului comun de masă al Pământului și Lunii, știind că raza Pământului este de 6370 km, masa Lunii este 1/81 din masa Pământului, iar distanța dintre cele două corpuri este de 60 de raze terestre.

Răspuns: 4660 km de centrul Pământului.

7.10 Să se determine poziția punctului din spațiu în care accelerațiile gravitaționale ale Pământului și Lunii sînt numeric egale, dar sînt orientate în sensuri opuse. Datele necesare pot fi preluate din problema precedentă.

Răspuns: 343 980 km de centrul Pământului.

7.11 Între ce limite variază accelerația gravitațională a cometei Halley, pentru care elementele orbitale necesare sînt: $a = 18{,}0$ UA și $e = 0{,}967$? Se știe că masa Soarelui este de 333 000 mase terestre, iar diametrul lui este de 1 392 000 km.

Răspuns: De la $4{,}74 \cdot 10^{-4}$ pînă la 1,68 (cm/s^2). Cu alte cuvinte, valoarea maximă întrece de 3550 de ori pe cea minimă.

7.12 Să se arate că ecuațiile mișcării a două puncte materiale $(S, \mathcal{M})$ și (P, m) în jurul centrului comun de masă, G, sînt:

$$\ddot{\vec{r}}_S = -\mu_S \vec{r}_S / r_S^3, \quad \text{unde } \mu_S = G m^3/(\mathcal{M}+m)^2,$$

$$\ddot{\vec{r}}_P = -\mu_P \vec{r}_P / r_P^3, \quad \text{unde } \mu_P = G\mathcal{M}^3/(\mathcal{M}+m)^2,$$

adică au aceeași formă ca ecuația mișcării punctului material (P, m) față de centrul atractiv $(S, \mathcal{M})$, dar parametrii gravitaționali μ_S, μ_P și μ diferă unul de celălalt.

Rezolvare: Pe baza formulei centrului de greutate:

$$\vec{\varrho} = (\mathcal{M}\vec{R}_o + m\vec{R})/(\mathcal{M}+m) \qquad (7.2)$$

și a relațiilor vectoriale evidente (fig.7.1):

$$\vec{R}_o = \vec{\varrho} + \vec{r}_S,$$
$$\vec{R} = \vec{\varrho} + \vec{r}_P,$$
$$-\vec{r}_S + \vec{r}_P = \vec{r},$$

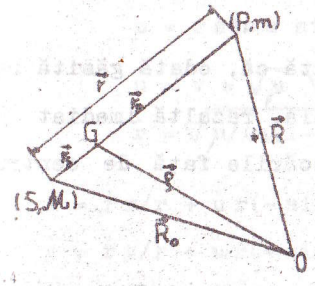

Fig.7.1. Mișcarea față de centrul de masă, G.

rezultă următoarele sisteme de ecuații vectoriale:

$$\mathcal{M}\vec{r}_S + m\vec{r}_P = 0,$$
$$-m\vec{r}_S + m\vec{r}_P = m\vec{r};$$

precum și:

$$\mathcal{M}\vec{r}_S + m\vec{r}_P = 0 ,$$

$$-\mathcal{M}\vec{r}_S + \mathcal{M}\vec{r}_P = \mathcal{M}\vec{r} ,$$

de unde:

$$(\mathcal{M}+m)\vec{r}_S = -m\vec{r} , \qquad (\mathcal{M}+m)\vec{r}_P = \mathcal{M}\vec{r} . \qquad (7.3)$$

Rezultă că $\ddot{\vec{r}}_S = -(m/(\mathcal{M}+m))\ddot{\vec{r}}$ şi $\ddot{\vec{r}}_P = (\mathcal{M}/(\mathcal{M}+m))\ddot{\vec{r}}$.

Folosindu-ne de ecuaţia vectorială a mişcării relative în cadrul problemei a două corpuri:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3 ,$$

unde $\mu = G(\mathcal{M}+m)$, şi avînd în vedere formulele (7.3) şi faptul că între versorii vectorilor $\vec{r}$, $\vec{r}_S$, $\vec{r}_P$ există relaţiile: $\vec{r}/r = -\vec{r}_S/r_S$, $\vec{r}/r = \vec{r}_P/r_P$, rezultă ecuaţiile diferenţiale ale mişcării faţă de centrul comun de masă, G:

$$\ddot{\vec{r}}_S = -(m/(\mathcal{M}+m))\ddot{\vec{r}} = (m/(\mathcal{M}+m))\,G(\mathcal{M}+m)\vec{r}/r^3 =$$
$$= -(Gm^3/(\mathcal{M}+m)^2)\vec{r}_S/r_S^3 = -\mu_S\vec{r}_S/r_S^3 ,$$

$$\ddot{\vec{r}}_P = (\mathcal{M}/(\mathcal{M}+m))\ddot{\vec{r}} = -(\mathcal{M}/(\mathcal{M}+m))\,G(\mathcal{M}+m)\vec{r}/r^3 =$$
$$= -(G\mathcal{M}^3/(\mathcal{M}+m)^2)\vec{r}_P/r_P^3 = -\mu_P\vec{r}_P/r_P^3 ,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie: Relaţiile (7.3) arată că, odată găsită raza vectoare $\vec{r}$ din ecuaţia sa diferenţială, rezultă imediat şi razele vectoare $\vec{r}_S$ şi $\vec{r}_P$, adică mişcările faţă de centrul comun de masă, G.

7.13	Să se scrie succesiunea funcţiilor ce reprezintă soluţia generală a problemei celor două corpuri, în cazul mişcării eliptice.

Rezolvare: Coordonatele şi componentele vitezei punctului material (P,m) în raport cu punctul material (S,$\mathcal{M}$), în funcţie de timp şi de cele 6 constante de integrare (elementele orbitale a, e, M_o, Ω, i, ω), sînt determinate prin următoarea succesiune de formule:

$$n = \sqrt{\mu}\,a^{-3/2} , \quad \text{unde } \mu = G(\mathcal{M}+m) ;$$

$$M = n(t-\tau) = M_o + n(t-t_o) ;$$

$$E - e\sin E = M ;$$

$$r = a(1-e\cos E) = a(1-e^2)/(1+e\cos v) ;$$

$$\operatorname{tg}(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\,\operatorname{tg}(E/2) ;$$

$$\xi = r\cos v = a(\cos E - e) ,$$
$$\eta = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E ;$$

$$u = v + \omega ;$$

precum şi formulele:

$$x = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) ,$$
$$y = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) , \qquad (7.4)$$
$$z = r\sin u\sin i ;$$

$$\dot{u} = \dot{v} = \sqrt{\mu}\,\sqrt{a(1-e^2)}/r^2 ,$$
$$\dot{r} = \sqrt{\mu/(a(1-e^2))}\,e\sin v ;$$

$$\dot{x} = \dot{r}x/r + \dot{u}r(-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i) ,$$
$$\dot{y} = \dot{r}y/r + \dot{u}r(-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i) , \qquad (7.5)$$
$$\dot{z} = \dot{r}z/r + \dot{u}r\cos u\sin i ;$$

sau formulele corespunzătoare, exprimate cu ajutorul coordonatelor orbitale rectangulare, scrise în forma matricială următoare:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix},$$

unde vectorii $\vec{P}(P_x, P_y, P_z)$, $\vec{Q}(Q_x, Q_y, Q_z)$, $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ se numesc elementele vectoriale ale orbitei, componentele lor reprezentînd cosinuşii directori ai axelor de coordonate orbitale:

$$\begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - & -\cos\Omega\sin\omega - & \sin\Omega\sin i \\ -\sin\Omega\sin\omega\cos i, & -\sin\Omega\cos\omega\cos i, & \\ \sin\Omega\cos\omega + & -\sin\Omega\sin\omega + & -\cos\Omega\sin i \\ +\cos\Omega\sin\omega\cos i, & +\cos\Omega\cos\omega\cos i, & \\ \sin\Omega\sin i, & \cos\Omega\sin i, & \cos i \end{pmatrix}$$

la care se adaugă şi formulele pentru componentele vitezei faţă de sistemul de referinţă fundamental, Sxyz.

7.14 Să se stabilească succesiunea funcţiilor ce reprezintă soluţia generală a problemei celor două corpuri, în cazul mişcării hiperbolice.

Rezolvare: Cazul mişcării punctului material (P,m) în raport cu punctul material (S,$\mathcal{M}$) pe hiperbolă diferă de cazul mişcării pe elipsă numai prin faptul că, în ecuaţiile în care apar excentricitatea şi semiaxa mare, trebuie considerat $e>1$ şi $a<0$, axa mare fiind socotită între vîrfurile celor două ramuri ale hiperbolei (fig.7.2). (Fireşte, sub acţiunea atractivă a punctului (S,$\mathcal{M}$), punctul (P,m) descrie numai una dintre ramurile hiperbolei, cea care conţine în interiorul său punctul S.)

Pentru a evita mărimile imaginare în formulele finale, în cazul mişcării hiperbolice se folosesc funcţiile hiperbolice, introducînd în locul anomaliei excentrice, E, un nou argument real, H, astfel:

$$H = iE,$$

$$\operatorname{sh} H = i \sin E,$$

$$\operatorname{ch} H = \cos E,$$

precum şi valoarea absolută a semiaxei mari, $|a|$.

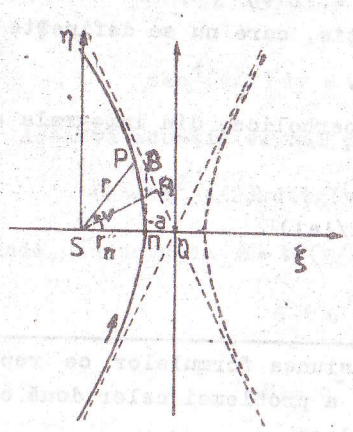

Fig.7.2. Mişcarea pe hiperbolă.

Făcînd această substituţie în toate formulele mişcării eliptice, obţinem formulele corespunzătoare pentru mişcarea hiperbolică. De exemplu:

$$\eta = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E = (1/i)\,a\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{sh} H = |a|\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{sh} H.$$

Vom avea, deci, succesiv:

$$\xi = r\cos v = |a|(e - \operatorname{ch} H),$$

$$\eta = r\sin v = |a|\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{sh} H;$$

$$r = |a|(e\operatorname{ch} H - 1);$$

$$\operatorname{tg}(v/2) = \sqrt{(e+1)/(e-1)}\,\operatorname{th}(H/2);$$

$$e\operatorname{sh} H - H = \nu(t-\tau);$$

$$\nu = \sqrt{\mu}\,|a|^{-3/2}, \qquad \mu = G(\mathcal{M}+m).$$

Ecuaţia analogă ecuaţiei lui Kepler are - ca şi ecuaţia lui Kepler -, pentru fiecare valoare a lui t, o singură ră-

dăcină reală.

Evident, mişcarea mijlocie pentru hiperbolă, γ, nu poate fi legată de perioada de revoluţie, care nu se defineşte pentru hiperbolă (orbită deschisă).

Pentru calculul vitezei hiperbolice, din integrala energiei rezultă formula:

$$v^2 = \mu(2/r + 1/|a|) . \qquad (7.6)$$

7.15 Să se stabilească succesiunea formulelor ce reprezintă soluţia generală a problemei celor două corpuri, în cazul mişcării parabolice.

Rezolvare: În cazul parabolei $e = 1$ şi ecuaţia orbitei în coordonate polare devine:

$$r = p/(1 + \cos v) .$$

Dacă introducem următoarea notaţie (fig.7.3):

$$q = p/2 ,$$

ecuaţia parabolei se poate pune sub forma:

$$r = q/\cos^2(v/2) = q \sec^2(v/2) .$$

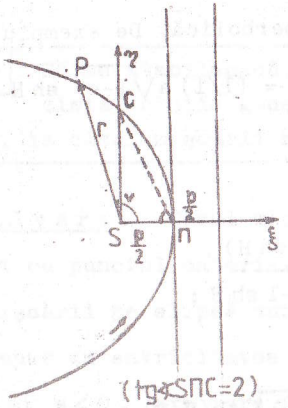

Fig.7.3. Mişcarea pe parabolă.

În cazul mişcării parabolice, în locul elementelor orbitale a şi e, vom avea un singur element: q, numit distanţa periastrului. Într-adevăr, la $v = 0$ avem $r = r_\Pi = q$.

Din integrala ariilor rezultă:

$$r^2 \, dv/dt = \sqrt{\mu}\,\sqrt{2q} ,$$

sau:

$$\sec^4(v/2)\, dv = \sqrt{2}\,\sqrt{\mu}\; q^{-3/2}\, dt .$$

Această ecuaţie se mai poate scrie sub forma:

$$(1 + tg^2(v/2))\, d(tg(v/2)) = \sqrt{\mu}\; dt\,/(\sqrt{2}\, q^{3/2}) ,$$

de unde, cu notaţia $\sigma = tg(v/2)$, obţinem:

$$\sigma + \sigma^3/3 = \sqrt{\mu/2}\; B ,$$

unde:

$$B = q^{-3/2}(t - \tau) ,$$

τ fiind timpul trecerii prin periastru (Π).

Mărimea B se numeşte în astronomie argumentul parabolic.

După cum se vede cu uşurinţă, ecuaţia în σ şi t, pentru fiecare valoare a lui t, dă o singură valoare v.

Pentru calculul vitezei parabolice, din integrala energiei rezultă formula:

$$v^2 = 2\mu/r . \qquad (7.7)$$

7.16 Să se studieze cazul mişcării în linie dreaptă a celor două puncte materiale, $(S, \mathcal{M})$ şi (P, m).

Rezolvare: Cazul mişcării în linie dreaptă se realizează atunci cînd $\vec{c} = \vec{0}$, adică atunci cînd vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{V}$ sînt coliniari ($\vec{r} \times \vec{V} = \vec{0}$).

Ecuaţia razei vectoare în funcţie de timp se obţine în urma rezolvării ecuaţiei diferenţiale:

$$(dr/dt)^2 = 2\mu/r + h\,, \qquad (7.8)$$

care este consecinţa integralei energiei pentru $c = 0$.

Utilizînd formula:

$$h = -\mu/a$$

şi separînd variabilele, obţinem:

$$dr/\sqrt{(2 - r/a)/r} = \sqrt{\mu}\, dt\,,$$

sau, după integrare:

$$\int_0^r \sqrt{r/(2 - r/a)}\, dr = \sqrt{\mu}\,(t - \tau)\,, \qquad (7.9)$$

τ fiind constanta de integrare, a cărei semnificaţie fizică este dată de însăşi formula în care apare: $t = \tau$ este momentul ciocnirii reale a celor două puncte materiale ($r = 0$).

Vom deosebi următoarele tipuri de mişcări rectilinii în problema celor două corpuri:

1) Cazul $h = 0$, $a = \infty$

Din formula (7.9) rezultă:

$$r = (\sqrt{\mu/2})^{2/3}(t - \tau)^{2/3}\,.$$

Acestei ecuaţii i se poate da forma ecuaţiei mişcării parabolice din problema 7.15, introducînd variabila auxiliară σ cu ajutorul relaţiei $r = \sigma^2$. Atunci rezultă ecuaţia:

$$\sigma^3/3 = \sqrt{\mu/2}\,(t - \tau)\,. \qquad (7.10)$$

2) Cazul $h < 0$, $a > 0$

Introducînd variabila auxiliară E cu ajutorul relaţiei $r = a(1 - \cos E)$, rezultă:

$$\int_0^E \sqrt{a(1 - \cos E)/(1 + \cos E)}\; a \sin E\, dE = \sqrt{\mu}\,(t - \tau)$$

şi, după calculul integralei:

$$E - \sin E = n(t - \tau)\,, \qquad (7.11)$$

unde $n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2}$.

3) Cazul $h > 0$, $a < 0$

Deoarece în acest caz variabila uniformizatoare a relaţiei dintre r şi t este imaginară, putem pune, introducînd argumentul real H:

$$r = |a|(\mathrm{ch}\, H - 1)\,,$$

ceea ce dă, în mod analog cazului precedent:

$$\mathrm{sh}\, H - H = \nu(t - \tau)\,, \qquad (7.12)$$

unde $\nu = \sqrt{\mu}\, |a|^{-3/2}$.

Vom reprezenta acum grafic funcţia $r = r(t)$ în toate cele trei cazuri ale mişcării rectilinii (fig. 7.4).

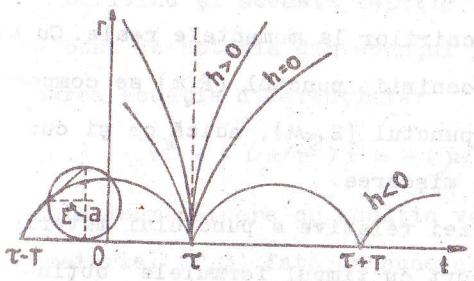

Fig.7.4. Variaţia razei vectoare în funcţie de timp în cazurile mişcării rectilinii.

În cazul $h < 0$, graficul funcţiei reprezintă o cicloidă; într-adevăr, comparînd formulele obţinute cu ecuaţiile parametrice standard ale cicloidei:

$$y = a(1 - \cos E)\,,$$
$$x = a(E - \sin E)\,,$$

unde a este raza cercului ce se rostogoleşte fără să alunece pe o dreaptă fixă, iar E - parametrul, avem prin identificare:

$$y = r, \quad x = n(t-\tau).$$

De aici rezultă că punctele de întoarcere ale cicloidei au abscisele:

$$t_k = \tau + 2k\pi/n \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

care corespund momentelor ciocnirilor reale ale punctelor materiale.

În cazul $h = 0$, relaţia obţinută se reprezintă printr-o parabolă semicubică.

În cazul $h > 0$, curba reprezentată prin relaţiile obţinute are un singur punct în care $r = 0$. Pentru $t \to \pm\infty$, respectiva curbă se apropie asimptotic de două drepte simetrice faţă de dreapta $t = \tau$.

Se observă că, rămînînd în domeniul noţiunilor matematice abstracte, mişcarea este reprezentată, cu ajutorul formulelor respective, pentru toate valorile timpului $t \in (-\infty, +\infty)$, indiferent de prezenţa ciocnirilor la momentele reale. Cu alte cuvinte, la momentul ciocnirii, punctul (P,m) se comportă ca şi cum ar ricoşa de la punctul $(S, \mathcal{M})$, adică ca şi cum aceste ciocniri n-ar înceta mişcarea.

Pentru obţinerea vitezei relative a punctului material (P,m), se derivează în raport cu timpul formulele obţinute pentru raza vectoare, r.

7.17 Să se demonstreze că ecuaţiile mişcării relative în problema celor două corpuri posedă şi următoarele integrale prime (integralele lui Laplace):

$$x\dot{r}^{*} - r^{*}\dot{x} = f_x,$$

$$y\dot{r}^{*} - r^{*}\dot{y} = f_y,$$
$$z\dot{r}^{*} - r^{*}\dot{z} = f_z,$$

unde am notat, pentru prescurtare (introducînd, de fapt, o variabilă auxiliară):

$$r^{*} = r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z},$$

iar f_x, f_y, f_z sînt constantele de integrare (componentele vectorului lui Laplace, $\vec{f}$).

Rezolvare: Derivînd expresia lui r^{*} în raport cu timpul:

$$\dot{r}^{*} = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

şi folosind ecuaţiile mişcării relative şi integrala energiei, obţinem:

$$\dot{r}^{*} = -(\mu/r^3)(x^2 + y^2 + z^2) + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 =$$
$$= -\mu/r + 2\mu/r + h = \mu/r + h.$$

Derivînd şi această relaţie în raport cu timpul şi ţinînd cont de notaţia din enunţul problemei, se ajunge la următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\ddot{r}^{*} = -(\mu/r^2)\dot{r} = -(\mu/r^3)r\dot{r} = -(\mu/r^3)r^{*},$$

ecuaţie asemănătoare cu ecuaţia vectorială a mişcării punctului material (P,m) faţă de punctul material $(S, \mathcal{M})$, unde $\mu = G(\mathcal{M} + m)$ şi $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Făcînd combinaţiile $x\ddot{r}^{*} - r^{*}\ddot{x}$ etc., obţinem următoarele ecuaţii (asemănătoare întrucîtva cu cele din care au rezultat integralele ariilor):

$$x\ddot{r}^{*} - r^{*}\ddot{x} = d(x\dot{r}^{*} - r^{*}\dot{x})/dt = 0,$$
$$y\ddot{r}^{*} - r^{*}\ddot{y} = d(y\dot{r}^{*} - r^{*}\dot{y})/dt = 0,$$
$$z\ddot{r}^{*} - r^{*}\ddot{z} = d(z\dot{r}^{*} - r^{*}\dot{z})/dt = 0,$$

de unde, prin integrare, ajungem la integralele lui Laplace din enunţul problemei.

În problema următoare vom arăta că integralele lui Laplace pot fi puse şi sub altă formă, dacă ne folosim de integralele ariilor.

7.18 Să se arate că integralele lui Laplace pot fi puse sub următoarea formă vectorială:

$$(\mu/r)\vec{r} + \vec{c}\times\dot{\vec{r}} = -\vec{f},$$

echivalentă cu următoarele integrale scalare:

$$-(\mu/r)x - (c_y\dot{z} - c_z\dot{y}) = f_x,$$
$$-(\mu/r)y - (c_z\dot{x} - c_x\dot{z}) = f_y,$$
$$-(\mu/r)z - (c_x\dot{y} - c_y\dot{x}) = f_z.$$

Rezolvare: Pornind de la expresia derivatei $\dot{r}^*$ din problema precedentă: $\dot{r}^* = -\mu/r + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ şi utilizînd şi expresia lui r^* din aceeaşi problemă, integralele lui Laplace, după calcule simple, se pot scrie sub forma:

$$-(\mu/r)x + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) = f_x,$$
$$-(\mu/r)y + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) = f_y,$$
$$-(\mu/r)z + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) = f_z.$$

Folosindu-ne de integralele ariilor ale ecuaţiilor mişcării relative:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_x,$$
$$z\dot{x} - x\dot{z} = c_y, \qquad (7.13)$$
$$x\dot{y} - y\dot{x} = c_z,$$

unde c_x, c_y, c_z sînt constantele ariilor, reprezentînd componentele vectorului $\vec{c}$ (vectorul moment cinetic), rezultă imediat integralele scalare din enunţul problemei.

Reamintindu-ne că integralele ariilor folosite sînt reprezentarea analitică a integralei vectoriale a ariilor:

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{c}, \qquad (7.14)$$

rezultă şi forma vectorială a integralelor lui Laplace din enunţul problemei.

7.19 Să se demonstreze că între constantele de integrare $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ şi h există relaţiile:

$$\vec{f}\cdot\vec{c} = 0,$$
$$f^2 = \mu^2 + hc^2,$$

unde $f = |\vec{f}|$, $c = |\vec{c}|$, ceea ce arată că din cele şapte integrale prime ale ecuaţiilor mişcării relative, din cadrul problemei celor două corpuri, numai cinci integrale prime sînt independente.

Rezolvare: Dacă înmulţim scalar cu $\vec{c}$ ecuaţia vectorială a lui Laplace:

$$\vec{c}\times\dot{\vec{r}} + (\mu/r)\vec{r} = -\vec{f}, \qquad (7.15)$$

ne reamintim faptul că:

$$\vec{c}\cdot\vec{r} = 0 \qquad (7.16)$$

(ecuaţia planului mişcării) şi ţinem seama de proprietatea produsului mixt:

$$\vec{c}\cdot(\vec{c}\times\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}}\cdot(\vec{c}\times\vec{c}) = 0,$$

rezultă:

$$\vec{f}\cdot\vec{c} = 0, \qquad (7.17)$$

adică vectorul lui Laplace se află în planul orbitei mişcării.

relative (ca şi vectorul $\vec{r}$).

A doua relaţie se obţine prin calculul direct al expresiilor lui f^2 şi c^2, din care se va elimina r^{*2}:

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = r^2 \dot{r}^{*2} + r^{*2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - 2r^* \dot{r}^* (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = r^2(\mu/r + h)^2 + r^{*2}(2\mu/r + h) - 2r^{*2}(\mu/r + h) =$$
$$= r^2(\mu/r + h)^2 - r^{*2} h ;$$

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = (y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2 =$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2 =$$
$$= r^2(2\mu/r + h) - r^{*2} .$$

Din aceste relaţii se obţine imediat:

$$f^2 - h c^2 = \mu^2 , \qquad (7.18)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

7.20 Să se demonstreze că orbita relativă a celor două puncte materiale, (P,m) şi (S,$\mathcal{M}$), este dată de soluţia (comună a) următorului sistem de ecuaţii:

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0 ,$$
$$\mu r + f_x x + f_y y + f_z z - c^2 = 0 ,$$

prima dintre aceste ecuaţii reprezentînd ecuaţia planului orbitei, iar cea de-a doua - ecuaţia unei suprafeţe de ordinul al doilea.

Indicaţie: Trebuie arătat că punctul mobil P(x, y, z) se află întotdeauna pe suprafaţa de ordinul al doilea din enunţul problemei (în planul orbitei acest punct se află în mod evident). Se porneşte de la ecuaţia vectorială a lui Laplace, satisfăcută de coordonatele rectangulare ale punctului mobil

7.21 Să se demonstreze că direcţia semiaxei mari a secţiunii conice din problema precedentă este arătată de vectorul lui Laplace.

Indicaţie: Va trebui demonstrată conjectura că suprafaţa dată de ecuaţia $\mu r + f_x x + f_y y + f_z z - c^2 = 0$ este o suprafaţă de rotaţie, a cărei axă de rotaţie este o dreaptă ce trece prin originea coordonatelor (centrul atractiv, S), vectorul ei de orientare fiind vectorul $\vec{f}$.

7.22 Fie $S\xi\eta\zeta$ un sistem de coordonate rectangular drept, avînd ca plan $S\xi\eta$ - planul orbitei relative, axa $S\xi$ fiind orientată după vectorul lui Laplace, $\vec{f}$, iar axa $S\zeta$ - după vectorul moment cinetic $\vec{c}$ (coordonate orbitale). Să se stabilească relaţiile de transformare dintre sistemele de coordonate rectangulare $S\xi\eta\zeta$ şi Sxyz.

Rezolvare: Coordonatele orbitale sînt definite în fig. 7.5.

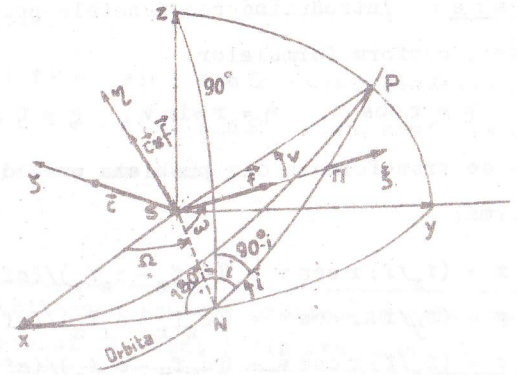

Fig.7.5. Pentru definirea coordonatelor orbitale.

Din faptul că $\vec{c} \perp \vec{f}$ rezultă că vectorul director al axei $S\eta$ este vectorul $\vec{c} \times \vec{f}$. Cosinuşii directori ai axelor de coordonate orbitale $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ faţă de axele sistemului $Sxyz$ vor fi daţi de următorul tabel:

	ξ	η	ζ
x	f_x/f	$(c_y f_z - c_z f_y)/(cf)$	c_x/c
y	f_y/f	$(c_z f_x - c_x f_z)/(cf)$	c_y/c
z	f_z/f	$(c_x f_y - c_y f_x)/(cf)$	c_z/c

Atunci relaţiile de transformare se scriu astfel:

$$x = (f_x/f)\xi + ((c_y f_z - c_z f_y)/(cf))\eta + (c_x/c)\zeta ,$$
$$y = (f_y/f)\xi + ((c_z f_x - c_x f_z)/(cf))\eta + (c_y/c)\zeta ,$$
$$z = (f_z/f)\xi + ((c_x f_y - c_y f_x)/(cf))\eta + (c_z/c)\zeta .$$

7.23 Să se exprime componentele vectorului lui Laplace, f_x, f_y, f_z, în funcţie de elementele unghiulare ale orbitei Ω - longitudinea nodului ascendent, i - înclinarea orbitei şi ω - longitudinea periastrului Π (fig.7.5).

Rezolvare: Introducînd coordonatele polare (r,v) în planul orbitei, conform formulelor:

$$\xi = r\cos v , \quad \eta = r\sin v , \quad \zeta = 0 ,$$

relaţiile de transformare din problema precedentă capătă următoarea formă:

$$x = (f_x/f)\, r\cos v + ((c_y f_z - c_z f_y)/(cf))\, r\sin v ,$$
$$y = (f_y/f)\, r\cos v + ((c_z f_x - c_x f_z)/(cf))\, r\sin v ,$$
$$z = (f_z/f)\, r\cos v + ((c_x f_y - c_y f_x)/(cf))\, r\sin v .$$

Comparînd aceste relaţii cu relaţiile cunoscute din soluţia generală a problemei celor două corpuri (care pot fi citite şi din triunghiurile sferice xPN, yPN şi zPN din figura 7.5):

$$x/r = \cos\Omega\cos(\omega+v) - \sin\Omega\sin(\omega+v)\cos i =$$
$$= (\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i)\cos v -$$
$$- (\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i)\sin v ,$$
$$y/r = \cos(90^\circ-\Omega)\cos(\omega+v) + \sin(90^\circ-\Omega)\sin(\omega+v)\cos i =$$
$$= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\cos v -$$
$$- (\sin\omega\sin\Omega - \cos\omega\cos\Omega\cos i)\sin v ,$$
$$z/r = \cos 90^\circ\cos(\omega+v) + \sin 90^\circ\sin(\omega+v)\cos(90^\circ-i) =$$
$$= \sin\omega\sin i\cos v + \cos\omega\sin i\sin v ,$$

rezultă relaţiile căutate:

$$f_x/f = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i ,$$
$$f_y/f = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i , \qquad (7.19)$$
$$f_z/f = \sin\omega\sin i ,$$

precum şi relaţiile:

$$(c_y f_z - c_z f_y)/(cf) = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i ,$$
$$(c_z f_x - c_x f_z)/(cf) = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i , \qquad (7.20)$$
$$(c_x f_y - c_y f_x)/(cf) = \cos\omega\sin i .$$

7.24 Să se stabilească ecuaţia orbitei pe calea rezolvării sistemului de ecuaţii din problema 7.20.

Rezolvare: Utilizînd formulele de transformare din sistemul $Sxyz$ în sistemul $S\xi\eta\zeta$ (problema 7.22), vom transforma

ecuaţiile menţionate, şi anume:

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0 ,$$
$$\mu r + f_x x + f_y y + f_z z - c^2 = 0 , \qquad (7.21)$$

în sistemul $S\xi\eta\zeta$. Obţinem ecuaţiile echivalente:

$$\zeta = 0 ,$$
$$\mu r + f\xi + 0\cdot\eta = c^2 . \qquad (7.22)$$

În coordonatele polare introduse în problema 7.23, vom avea:

$$\mu r + f r \cos v = c^2 ,$$

de unde rezultă:

$$r = c^2/(\mu + f\cos v) = (c^2/\mu)/(1 + (f/\mu)\cos v) , \qquad (7.23)$$

care reprezintă ecuaţia secţiunii conice avînd parametrul $p = c^2/\mu$, excentricitatea $e = f/\mu$ şi unghiul polar (anomalia adevărată) v.

Observaţie: Ecuaţia $\mu r + f r\cos v = c^2$ rezultă şi într-un mod mai simplu, dacă observăm că:

$$f_x x + f_y y + f_z z = \vec{f}\cdot\vec{r} = f r \cos(\vec{f},\vec{r}) = f r \cos v .$$

7.25 Să se determine elementele orbitale ale punctului material (P,m) ce se mişcă faţă de centrul atractiv (S,$\mathcal{M}$), fiind daţi pentru un anumit moment t vectorii de poziţie $\vec{r}(x, y, z)$ şi de viteză $\vec{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ai punctului (P,m).

Rezolvare: Elementele orbitale ale punctului (P,m) sînt, după cum se ştie din problema celor două corpuri:

$$p \text{ (sau } a), e, i, \Omega, \omega, \tau,$$

avînd semnificaţiile cunoscute.

Elementele p, e şi a se determină din relaţiile următoare: $p = c^2/\mu$, $e = \sqrt{1 + hc^2/\mu^2}$, $a = p/(1-e^2)$. Din condiţiile iniţiale $t : x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ trebuie, aşadar, determinate în prealabil constantele c şi h.

Integralele ariilor ne dau componentele c_x, c_y, c_z ale vectorului $\vec{c}$:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_x , \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_y , \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_z ,$$

de unde $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$.

Din integrala energiei se determină h:

$$h = V^2 - 2\mu/r = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2\mu/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

unde $\mu = G(\mathcal{M} + m)$, G fiind constanta atracţiei universale.

Elementele Ω şi i se determină din relaţiile:

$$\sin i \sin\Omega = c_x/c , \quad \sin i \cos\Omega = -c_y/c , \quad \cos i = c_z/c ,$$

de unde deducem: $\operatorname{tg}\Omega = -c_x/c_y$, $\operatorname{tg} i = \sqrt{(c_x^2 + c_y^2)/c_z^2}$, din care rezultă imediat:

$$\Omega = \operatorname{arctg}(-c_x/c_y) ,$$
$$i = \operatorname{arctg}(\sqrt{(c_x^2 + c_y^2)/c_z^2}) .$$

Pentru determinarea elementului ω, este oportun a utiliza integralele lui Laplace (problema 7.18), care dau vectorul $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$:

$$f_x = -\mu x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c_z\dot{y} - c_y\dot{z} ,$$
$$f_y = -\mu y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c_x\dot{z} - c_z\dot{x} ,$$
$$f_z = -\mu z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c_y\dot{x} - c_x\dot{y} ,$$

după care, cunoscîndu-se $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$, Ω şi i , unghiul se obţine din relaţiile (7.19) (problema 7.23):

$$f_x/f = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i ,$$
$$f_y/f = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i ,$$
$$f_z/f = \sin\omega\sin\Omega ,$$

de unde, în cazul $\cos i \neq 0$:

$$\sin\omega = (-f_x\sin\Omega + f_y\cos\Omega)/(f\cos i) ,$$
$$\cos\omega = (f_x\cos\Omega + f_y\sin\Omega)/f ,$$

relaţii din care rezultă:

$$\omega = \operatorname{arctg}(c\,f_z/(c_x f_y - c_y f_x)) .$$

În cazul $\cos i = 0$:

$$\sin\omega = f_z/f , \quad \cos\omega = f_y/(f\sin\Omega)$$

şi rezultă:

$$\omega = \operatorname{arctg}((f_z/f_y)\sin\Omega) .$$

Mai trebuie determinat elementul τ. Pentru această determinare se procedează astfel:

Din ecuaţia orbitei în coordonate polare:

$$r = p/(1 + e\cos v) ,$$

în care sînt cunoscute r , p şi e , se determină unghiul v, după care unghiul E se obţine din relaţia:

$$\operatorname{tg}(E/2) = \sqrt{(1-e)/(1+e)}\,\operatorname{tg}(v/2) .$$

Ecuaţia lui Kepler ne va furniza apoi unghiul M :

$$M = E - e\sin E ;$$

în sfîrşit, din relaţia $M = n(t - \tau)$, unde $n = \sqrt{\mu/a^3}$ şi t

sînt cunoscute, obţinem elementul τ :

$$\tau = t - M/n .$$

Observaţie : Problema este rezolvată pentru cazul mişcării pe elipsă. Pentru cazurile mişcării pe hiperbolă, parabolă sau în linie dreaptă, formulele care nu sînt comune (valabile pentru orice secţiune conică) se înlocuiesc cu formulele corespunzătoare de la problemele 7.14, 7.15, 7.16.

7.26 Să se arate că:

$$(1/(2\pi))\int_0^{2\pi} r\,dv = b = a\sqrt{1-e^2} ,$$

unde r este raza vectoare, iar v - anomalia adevărată a- le punctului material ce se mişcă pe o orbită eliptică, de semiaxe a şi b şi de excentricitate e , în condiţiile problemei celor două corpuri.

Rezolvare : Exprimăm r şi dv în funcţie de anomalia excentrică, E :

$$r = a(1 - e\cos E) ;$$
$$E - e\sin E = n(t - \tau) ,$$

de unde rezultă:

$$dt = (1/n)(1 - e\cos E)\,dE ,$$
$$r\,dv = (c/r)\,dt = c\,dt/(a(1 - e\cos E)) = (c/(na))\,dE .$$

Dar din $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ şi $n = \sqrt{\mu/a^3}$ se deduce imediat:

$$c/(na) = a\sqrt{1-e^2} = b .$$

În final rezultă:

$$(1/(2\pi))\int_0^{2\pi} r\,dv = (1/(2\pi))\int_0^{2\pi} (c/(na))\,dE = (1/(2\pi))\int_0^{2\pi} a\sqrt{1-e^2}\,dE$$
$$= a\sqrt{1-e^2} = b .$$

Observaţie: Folosind formulele (6.5) şi (6.6):

$$r = a(1 - e\cos E), \qquad r\cos v = a(\cos E - e),$$

obţinem pentru $\cos v$ expresia:

$$\cos v = (\cos E - e)/(1 - e\cos E),$$

de unde, prin diferenţiere, rezultă:

$$dv = (\sqrt{1 - e^2}/(1 - e\cos E))\, dE .$$

Deci:

$$r\, dv = a\sqrt{1 - e^2}\, dE .$$

7.27 Să se arate că în cazul mişcării eliptice:

$$(1/T)\int_0^T r\, dt = a(1 + e^2/2),$$

r fiind raza vectoare, iar T - perioada de revoluţie pe elipsă.

Indicaţie: A se vedea rezolvarea problemei precedente.

7.28 Să se demonstreze că în cazul mişcării eliptice:

$$(1/L)\int_0^L r\, d\ell = a,$$

unde L este lungimea elipsei, iar $d\ell$ - elementul de arc al elipsei.

Rezolvare: Avem:

$$(1/L)\int_0^L r\, d\ell = (1/L)\int_0^L a(1 - e\cos E)\, d\ell = a - (ae/L)\int_0^L \cos E\, d\ell .$$

Vom calcula integrala:

$$I = \int_0^L \cos E\, d\ell .$$

Vom folosi coordonatele parametrice ale elipsei:

$$x = a\cos E, \quad y = b\sin E;$$

$$dx = -a\sin E\, dE, \quad dy = b\cos E\, dE .$$

Rezultă, conform formulei lui Cauchy:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\, dE .$$

Atunci integrala I se exprimă astfel:

$$I = \int_0^L \cos E\, d\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\, \cos E\, dE + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\, \cos E\, dE .$$

Punînd $E = E_1 + \pi$, a doua integrală devine:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\, \cos E\, dE = -\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2 E_1 + b^2\cos^2 E_1}\, \cos E_1\, dE_1 ,$$

în urma căreia:

$$I = \int_0^L \cos E\, d\ell = 0$$

şi obţinem în final:

$$(1/L)\int_0^L r\, d\ell = a .$$

Observaţie: Comparînd valorile medii (integrale) de la problemele 7.26, 7.27 şi 7.28, se vede că cea din urmă este acea „distanţă medie" care figurează în legea a treia a lui Kepler.

7.29 Să se arate că, în cazul orbitei eliptice, anomalia excentrică, E, se exprimă, în funcţie de anomalia mijlocie, M, cu precizia e^2, prin formula aproximativă:

$$\operatorname{tg} E = \sin M/(\cos M - e) .$$

Indicaţie: Se foloseşte ecuaţia lui Kepler şi se dezvoltă în serii de puteri funcţiile $\sin M$ şi $\cos M$.

7.30 Să se demonstreze că componentele vitezei punctului material (P,m) după axele orbitei sale eliptice în raport cu centrul atractiv (S,$\mathcal{M}$), în cadrul problemei celor două corpuri, sînt:

$$dx/dt = -(c/p)\sin v\,,$$
$$dy/dt = (c/p)(e+\cos v)\,,$$

unde c este constanta ariilor, p - parametrul orbitei, e - excentricitatea, iar v - anomalia adevărată.

Să se scrie formula vitezei $|\vec{V}|$ pentru $v\in(0,2\pi)$ şi pentru vîrfurile elipsei (periastru, apoastru).

Rezolvare: În sistemul de coordonate Oxy (fig.7.6), coordonatele punctului P sînt:

$$x = ae + r\cos v\,,$$
$$y = r\sin v\,.$$

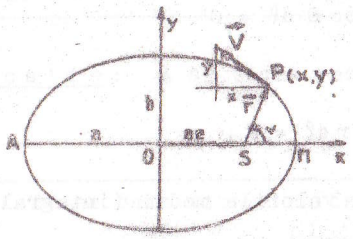

Fig.7.6. Componentele vitezei în mişcarea eliptică.

Ţinînd seama de faptul că:

$$r = r(t)\,,$$
$$v = v(t)\,,$$

şi derivînd în raport cu timpul expresiile coordonatelor x şi y, obţinem:

$$dx/dt = (dr/dt)\cos v - r(dv/dt)\sin v\,,$$
$$dy/dt = (dr/dt)\sin v + r(dv/dt)\cos v\,.$$

Folosind ecuaţia orbitei, expresia vitezei radiale, dr/dt

şi integralele ariilor (din problema 7.13, de exemplu), rezultă:

$$\begin{aligned} dx/dt &= (c/p)\,e\sin v\cos v - (c/p)(1+e\cos v)\sin v = \\ &= (c/p)(e\sin v\cos v - (1+e\cos v)\sin v) = \\ &= -(c/p)\sin v\,, \end{aligned} \tag{7.24}$$
$$\begin{aligned} dy/dt &= (c/p)(e\sin^2 v + (1+e\cos v)\cos v) = \\ &= (c/p)(e+\cos v)\,. \end{aligned}$$

Viteza V se obţine astfel: din relaţia $V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, ţinînd seama de expresiile (7.24), se deduce:

$$V = (c/p)\sqrt{1+e^2+2e\cos v}\,. \tag{7.25}$$

În vîrfurile elipsei (П, A):

$$V_{П} = V\big|_{v=0^\circ} = (c/p)(1+e)\,,$$
$$V_A = V\big|_{v=180^\circ} = (c/p)(1-e)\,.$$

7.31 Să se determine masa planetei Jupiter cu ajutorul mişcării satelitului său Io, care se mişcă în jurul planetei pe orbită circulară cu perioada $T = 1^z,769$, la distanţa $a = 421{,}6\cdot 10^3$ km.

Rezolvare: Ne folosim de legea a treia generalizată a lui Kepler, sub forma:

$$T^2(\mathcal{M}+m) = 132{,}7\cdot 10^{-16}\,a^3\,,$$

în care perioada T se exprimă în zile mijlocii, distanţa a în km, iar masa $\mathcal{M}$ în mase terestre (m - masa satelitului se neglijează în raport cu masa planetei).

Cu valorile date, obţinem:

$$\mathcal{M} = 132{,}7 \cdot 10^{-16}\, a^3/T^2 =$$

$$= 132{,}7 \cdot 10^{-16}(421{,}6 \cdot 10^3)^3/(1{,}769)^2 = 318 .$$

Aşadar, masa planetei Jupiter este de 318 ori mai mare decît masa Pămîntului.

7.32 Cometa Halley a trecut, în anul 1910, prin periheliul orbitei sale la o distanţă heliocentrică de 0,587 UA, cu viteza de 54,52 km/s. Să se determine tipul şi elementele orbitei sale.

Rezolvare: Pentru a stabili tipul orbitei, este necesar a se calcula viteza circulară şi viteza parabolică ale cometei faţă de Soare, la distanţa heliocentrică q. Din integrala energiei, ea avînd $h = -1/a$, respectiv $h = 0$, în raport cu viteza circulară a Pămîntului $V_{circ,P}$ (notată $V_{a,P}$) $= 29{,}8 = \sqrt{\mu/a}$, cu $a = 1$ UA, se obţin formulele:

$$V_{circ}|_{r=q} = 29{,}8/\sqrt{q} ,$$

$$V_{par}|_{r=q} = \sqrt{2}\, V_{circ} ,$$

unde vitezele se exprimă în km/s, iar distanţa q în UA.

Pentru $q = 0{,}587$, obţinem:

$$V_{circ}|_{r=0,587} = 29{,}8/\sqrt{0{,}587} = 38{,}87 \text{ km/s} ,$$

$$V_{par}|_{r=0,587} = 1{,}414 \cdot 38{,}87 = 54{,}96 \text{ km/s} .$$

Rezultă că viteza $V_q = 54{,}52$ km/s este cuprinsă între valorile vitezei circulare şi parabolice ale cometei în raport cu Soarele, la distanţa q. Întrucît V_q este foarte aproape de valoarea vitezei parabolice, orbita cometei Halley faţă de Soare este o elipsă foarte alungită.

Viteza V, într-un punct al orbitei de rază vectoare r, determinîndu-se pe baza integralei energiei, după formula:

$$V = V_a\sqrt{2a/r - 1} ,$$

unde V_a este viteza medie corespunzătoare distanţei a, semiaxa mare a orbitei eliptice se obţine astfel:

$$V_q = V_a\sqrt{2a/q - 1}$$

(formulă rezultată din cea anterioară pentru $r = q$); folosind formula pentru viteza circulară pentru cometă ($r = a$):

$$V_a = 29{,}78/\sqrt{a} \quad (\text{km/s}) ,$$

se obţine:

$$V_q = 29{,}78\sqrt{2/q - 1/a} ,$$

de unde:

$$a = (29{,}78)^2/((29{,}78)^2 \cdot 2/q - V_q^2) =$$

$$= 886{,}85/(886{,}85 \cdot 2/0{,}587 - (54{,}52)^2) = 18{,}0 \text{ UA}.$$

Excentricitatea orbitei eliptice se calculează conform formulei:

$$q = a(1 - e) ,$$

obţinîndu-se:

$$e = 1 - q/a = 1 - 0{,}587/18{,}0 = 0{,}967 .$$

Conform legii a treia (simple) a lui Kepler, obţinem perioada de revoluţie T (în ani siderali) după formula:

$$T = a\sqrt{a} ,$$

unde a este semiaxa mare exprimată în UA. Se obţine:

$$T = 18\sqrt{18} \cong 76 \text{ ani} .$$

Notă: Din calculele de efemeride a rezultat momentul trecerii la periheliu, $\tau = 9$ februarie 1986, la distanţa heliocen-

trică $q = 0{,}587$ UA, generaţia actuală de oameni fiind martoră a apariţiei pe cer a celebrei comete Halley. La Observatorul Astronomic din Cluj-Napoca, cometa a fost pentru prima dată observată (în prima perioadă de vizibilitate) în seara zilei de 14 noiembrie 1985, în vecinătatea stelei 37 Tauri, prezentînd o strălucire aparentă de $7^m{,}5$.

7.33 Să se calculeze pentru cometa Ikeya-Seki, avînd datele $q = 0{,}0083$ UA, $V_q = 480$ km/s, aceleaşi mărimi ca şi în problema precedentă.

Răspuns: $V_{circ} = 327$ km/s , $V_{par} = 461$ km/s , adică V_q este mai mare decît valoarea vitezei parabolice: cometa a trecut prin periheliu pe orbită hiperbolică şi, deci, ea nu se va mai reîntoarce în vecinătatea Soarelui.

7.34 Pentru asteroidul Icarus, semiaxa mare a orbitei este de 1,078 UA, iar excentricitatea ei $e = 0{,}826$. Să se determine: viteza în periheliu, viteza în afeliu, viteza medie, viteza în punctul avînd anomalia adevărată $v = 90^\circ$, precum şi viteza circulară şi viteza parabolică la distanţele respective de Soare.

Rezolvare: Din ecuaţia orbitei, pentru $0 < e < 1$ şi $v = 90^\circ$, obţinem:

$$r = 1{,}078\,(1 - (0{,}826)^2)/(1 + 0{,}826 \cos 90^\circ) = 0{,}342 \text{ UA};$$

iar pentru $v = 0^\circ$ (periheliu) şi, respectiv, $v = 180^\circ$ (afeliu) găsim următoarele valori:

$$r|_{v=0^\circ} = q = 1{,}078\,(1 - 0{,}826) = 0{,}188 \text{ UA},$$

$$r|_{v=180^\circ} = Q = 1{,}078\,(1 + 0{,}826) = 1{,}968 \text{ UA}.$$

Viteza medie a micii planete se obţine după formula:

$$V_a = 29{,}8/\sqrt{1{,}078} = 28{,}7 \text{ km/s},$$

viteza în periheliu, după formula:

$$V_q = 28{,}7\sqrt{1{,}968/0{,}188} = 93{,}0 \text{ km/s},$$

viteza în afeliu, după formula:

$$V_Q = 28{,}7/\sqrt{1{,}968/0{,}188} = 8{,}86 \text{ km/s},$$

viteza în punctul avînd anomalia adevărată $v = 90^\circ$, după formula:

$$V_r = 28{,}7\sqrt{2 \cdot 1{,}078/0{,}342 - 1} = 66{,}1 \text{ km/s},$$

viteza circulară la distanţa $q = 0{,}188$ UA, după formula:

$$V_{circ,q} = 29{,}8/\sqrt{0{,}188} = 68{,}7 \text{ km/s},$$

iar viteza parabolică la distanţa $q = 0{,}188$ UA, după formula:

$$V_{par,q} = 1{,}41 \cdot 68{,}7 = 96{,}9 \text{ km/s}.$$

Rezultă că $V_{circ,q} < V_q < V_{par,q}$, adică asteroidul Icarus se mişcă, într-adevăr, pe o orbită eliptică.

De asemenea, avem:

$$V_{circ,Q} = 29{,}8/\sqrt{1{,}968} = 21{,}2 \text{ km/s},$$

$$V_{par,Q} = 1{,}41 \cdot 21{,}2 = 29{,}9 \text{ km/s},$$

de unde rezultă că $V_Q < V_{circ,Q} < V_{par,Q}$.

La distanţa $r = 0{,}342$ UA, avem:

$$V_{circ,r} = 29{,}8/\sqrt{0{,}342} = 50{,}8 \text{ km/s},$$

$$V_{par,r} = 1{,}41 \cdot 50{,}8 = 71{,}6 \text{ km/s},$$

de unde rezultă că $V_{circ,r} < V_r < V_{par,r}$.

7.35 Satelitul artificial al Pământului „Intercosmos-Copernic", lansat la data de 19 aprilie 1973, în U.R.S.S., a avut următorii parametri de lansare: înălţimea minimă de la suprafaţa Pământului $H_q = 200$ km şi înălţimea maximă $H_Q = 1550$ km. Să se determine parametrii de mişcare ai satelitului artificial, cunoscînd că raza Pământului este $R = 6370$ km, iar masa Pământului se ia egală cu unitatea (adică $\mathcal{M} = 1$).

Rezolvare: După formula (fig.7.7):

$$a = (q + Q)/2 =$$

$$= R + (H_q + H_Q)/2 ,$$

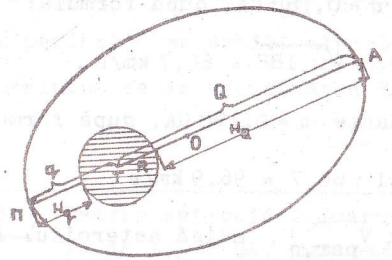

Fig.7.7. Pentru stabilirea parametrilor de mişcare ai satelitului artificial al Pământului.

unde $q = r_{\Pi} = R + H_q$ este distanţa pericentrului (perigeului în cazul de faţă), $Q = r_A = R + H_Q$ este distanţa apocentrului (apogeului în cazul de faţă); semiaxa mare a orbitei satelitului se obţine, avînd şi distanţele $q = 6370 + 200 = 6570$ km , $Q = 6370 + 1550 = 7920$ km , astfel:

$$a = 6370 + (200 + 1550)/2 = 7245 \text{ km} .$$

Excentricitatea orbitei se obţine după formula:

$$e = 1 - q/a ,$$

adică, în cazul de faţă:

$$e = 1 - 6570/7245 = 0{,}093 .$$

Perioada de revoluţie a satelitului, exprimată în minute, dacă distanţa lui se exprimă în km şi masa corpului central în unităţi de masă terestră, conform legii a treia (generalizate) a lui Kepler, se determină după formula:

$$T = 16{,}58 \cdot 10^{-5}\, a\sqrt{a/\mathcal{M}} , \qquad (7.26)$$

de unde, în cazul nostru:

$$T = 16{,}58 \cdot 10^{-5} \cdot 7245 \cdot \sqrt{7245} = 102^{m} ,$$

deoarece masa Pământului $\mathcal{M} = 1$.

Viteza circulară a satelitului, în km/s, se determină după formula:

$$V_a = 631{,}3\sqrt{\mathcal{M}/a} ,$$

dacă distanţa se exprimă în km şi masa corpului central în unităţi de masă terestră, de unde, în cazul nostru:

$$V_a = 631{,}3/\sqrt{7245} = 7{,}42 \text{ km/s} .$$

Următoarele formule ne dau vitezele satelitului în periastru, respectiv în apoastru:

$$V_q = V_a\sqrt{Q/q} = V_a\sqrt{(1+e)/(1-e)} ,$$

$$V_Q = V_a\sqrt{q/Q} = V_a\sqrt{(1-e)/(1+e)} ,$$

de unde, pentru cazul nostru, obţinem valorile vitezei satelitului artificial în perigeu, respectiv în apogeu:

$$V_q = 7{,}42\sqrt{7920/6570} = 8{,}15 \text{ km/s} ,$$

$$V_Q = 7{,}42\sqrt{6570/7920} = 6{,}76 \text{ km/s} .$$

7.36 Ce viteză areocentrică (Ares = Marte), şi la ce distanţă maximă de la suprafaţa planetei Marte, trebuie imprimată unei nave cosmice pentru ca ea să devină satelit artificial al planetei, urmînd a descrie o orbită eliptică cu excentricitatea de 0,250 şi perioada de 2^h40^m, ştiind că masa planetei Marte este de 0,107 mase terestre şi raza sa - de 3400 km ?

Rezolvare : Pentru determinarea semiaxei mari a orbitei satelitului artificial, se aplică următoarea formulă, echivalentă cu formula (7.26) din problema precedentă:

$$a = 331{,}2\sqrt[3]{\mathcal{M}T^2}\,, \qquad (7.27)$$

obţinîndu-se:

$$a = 331{,}2\sqrt[3]{0{,}107\cdot(160)^2} = 4650\ \text{km}\,.$$

Distanţa apocentrică (apoariu) se obţine astfel:

$$Q = a(1+e) = 4650\cdot 1{,}250 = 5810\ \text{km}\,,$$

după care rezultă distanţa maximă de la suprafaţa planetei:

$$H_Q = Q - R = 5810 - 3400 = 2410\ \text{km}\,.$$

Viteza circulară a satelitului este:

$$V_a = 631{,}3\sqrt{\mathcal{M}/a} = 631{,}3\sqrt{0{,}107/4650} = 3{,}04\ \text{km/s}$$

şi atunci viteza căutată în apoariu se obţine, ca în problema precedentă, astfel:

$$V_Q = V_a\sqrt{(1-e)/(1+e)}\,,$$

de unde rezultă imediat:

$$V_Q = 3{,}04\sqrt{0{,}750/1{,}250} = 2{,}35\ \text{km/s}\,.$$

7.37 Să se determine semiaxele mari ale orbitelor şi vitezele medii ale sateliţilor Io şi Callisto ai planetei Jupiter, ştiind că aceşti sateliţi se mişcă faţă de planetă cu perioadele de $1^z,769$, respectiv $16^z,689$ şi masa planetei Jupiter este de 318 ori mai mare decît masa Pămîntului.

Răspuns : $421{,}7\cdot 10^3$ km şi 17,3 km/s; $1883\cdot 10^3$ km şi 8,18 km/s.

7.38 Să se determine perioadele siderale şi vitezele medii ale sateliţilor Mimas şi Phoebe ai planetei Saturn, care se mişcă în jurul planetei la distanţele medii de $185{,}4\cdot 10^3$ km şi $12\,960\cdot 10^3$ km, masa planetei Saturn fiind de 95,2 ori mai mare decît masa Pămîntului.

Răspuns : $22^h,6$ şi 14,3 km/s; 550^z şi 1,71 km/s.

7.39 Să se determine masa planetei Marte în mase terestre după mişcarea satelitului său Deimos, aflat la distanţa medie de $23{,}5\cdot 10^3$ km de planetă, perioada de revoluţie în jurul planetei fiind de $1^z,26$. Se mai dau următoarele date spre folosire: perioada Lunii în jurul Pămîntului este de $27^z,32$, iar semiaxa mare a orbitei lunare - de $384{,}4\cdot 10^3$ km.

Răspuns : 0,107 .

7.40 Să se determine perioada de revoluţie ipotetică a Lunii presupunînd că masa Pămîntului ar creşte de

4 ori, iar Luna s-ar afla la o distanţă medie de 2 ori mai mare decît cea actuală. Se ştie că perioada actuală de revoluţie a Lunii este de $27^z,32$.

Răspuns: $38^z,63$.

7.41 Cît ar trebui să fie masa Soarelui pentru ca Pămîntul să evolueze în jurul lui cu perioada actuală, dar la o distanţă de două ori mai mare decît cea actuală? Cum s-ar modifica, în această ipoteză, perioadele de revoluţie ale planetelor Marte şi Saturn, dacă distanţele lor ar rămîne neschimbate, perioadele actuale de revoluţie ale acestor planete fiind de 1,881 ani şi de 29,46 ani?

Răspuns: De 8 ori mai mare; 243^z şi 10,42 ani.

7.42 Să se calculeze prima şi a doua viteză cosmică pentru suprafaţa planetei Jupiter, ca şi viteza satelitului său Io, ce se mişcă pe o orbită circulară de rază egală cu $421,6 \cdot 10^3$ km, ştiind că masa lui Jupiter ($\mathcal{M}$) este de 318 mase terestre, iar raza sa medie (R) - de 10,9 raze terestre.

Indicaţie: Dacă distanţa r se dă în km, iar masa corpului central, $\mathcal{M}$, în mase terestre, atunci considerăm pentru viteza circulară formula: $V_{circ} = 631,3\sqrt{\mathcal{M}/r}$ (km/s); dar dacă masa $\mathcal{M}$ se exprimă în mase terestre, iar distanţa r este dată în raze terestre, atunci $V_{circ} = 7,91\sqrt{\mathcal{M}/r}$ (km/s).

Răspuns: $V_{circ,R} \equiv V_o^{(1)} = 42,7$ km/s; $V_{par,R} \equiv V_o^{(2)} = 60,$ km/s; $V_a = 17,3$ km/s.

7.43 Să se calculeze viteza circulară şi viteza parabolică faţă de Soare la distanţele medii ale planetelor Venus (a = 0,723 UA), Pămînt (a = 1,00 UA), Jupiter (a = 5,20 UA) şi Pluto (a = 39,5 UA). Explicaţi rezultatele obţinute.

Răspuns: 35,02 şi 49,52; 29,78 şi 42,11; 13,06 şi 18,47; 4,74 şi 6,70 (toate vitezele sînt exprimate în km/s).

7.44 Semiaxa mare şi excentricitatea planetei Mercur sînt 0,387 UA şi, respectiv, 0,206; aceleaşi elemente orbitale ale planetei Marte sînt 1,524 UA şi 0,093. Să se determine viteza medie, viteza în periheliu şi viteza în afeliu ale acestor planete.

Răspuns: 47,9, 59,0 şi 38,9; 24,1, 26,5 şi 21,9 (toate vitezele sînt exprimate în km/s).

7.45 Pe baza parametrilor orbitali ai Pămîntului, să se calculeze masa Soarelui în mase terestre.

Răspuns: 333 000.

7.46 Satelitul artificial al Lunii „Luna-10" a avut următorii parametri orbitali: $H_q = 350$ km (înălţimea minimă deasupra suprafeţei Lunii), $H_Q = 1017$ km (înălţimea maximă deasupra suprafeţei Lunii). Se cer:

1) Semiaxa mare a orbitei satelitului (a).
2) Excentricitatea orbitei satelitului (e).

3) Semiaxa mică a orbitei satelitului (b).

4) Parametrul orbitei satelitului (p).

5) Demonstrarea formulei ce leagă anomalia adevărată (v) de anomalia excentrică (E) pentru o poziţie oarecare a satelitului:

$$tg(v/2) = \sqrt{(H_Q + R)/(H_q + R)}\, tg(E/2) ,$$

unde R este raza medie a Lunii.

6) Perioada de revoluţie a satelitului în jurul Lunii (T).

7) Să se arate că satelitul artificial al Lunii are o perioadă de revoluţie de circa 9 ori mai mare decît perioada similară a unui satelit al Pământului care se plasează pe o orbită cu aceeaşi semiaxă mare ca şi orbita satelitului Lunii.

Pentru calculele numerice se dau datele următoare: $R = 1738$ km, $m_L/m_P = 1/81{,}5$, $T_L = 27^z{,}3$, $a_L = 384\,400$ km.

Indicaţie: Se utilizează formulele:

$$a = (H_q + H_Q)/2 + R ;$$

$$e = (H_Q - H_q)/(H_Q + H_q + 2R) ;$$

$$b = \sqrt{(R + H_q)(R + H_Q)} ;$$

$$p = 2(R + H_Q)(R + H_q)/(H_Q + H_q + 2R) ;$$

$$T = T_L (a/a_L)\sqrt{a/a_L}\,\sqrt{1 + m_P/m_L} .$$

Răspuns: $a = 2421{,}5$ km ; $e = 0{,}134$; $b = 2398{,}4$ km ; $p = 2375{,}6$ km ; $T = 2^h 54^m 11^s{,}8$.

7.47 Nava cosmică „Luna-2" (căzută pe Lună la 4 septembrie 1959) a avut la distanţa de 320 000 km de centrul Pământului viteza de 2,31 km/s. Ce viteză avea racheta la distanţa de 230 km de la suprafaţa Pământului? Se dau următoarele valori numerice: $R = 6370$ km (raza medie a Pământului), $\mu = 398\,600$ km^3/s^2 (parametrul gravitaţional al Pământului).

Indicaţie: Se aplică integrala energiei: $V^2 = 2\mu/r + h$.

Răspuns: 11,11 km/s.

7.48 O navă cosmică este plasată pe o orbită eliptică în jurul Pământului, la înălţimea de 230 km deasupra suprafeţei Pământului, cu viteza iniţială $V_o = 10{,}95$ km/s. La momentul pornirii vectorul viteză este perpendicular pe raza vectoare geocentrică, fiind situat în planul orbitei Lunii. În cît timp ajunge racheta la orbita Lunii, de rază egală cu 384 000 km?

Rezolvare: Din enunţul problemei deducem că punctul de pornire al rachetei este tocmai perigeul orbitei sale, a cărui distanţă este $r_\pi = 6370 + 230 = 6600$ km.

Semiaxa mare a orbitei se obţine din integrala energiei pentru mişcarea eliptică:

$$V_o^2 = V^2 = \mu(2/r_\pi - 1/a) ,$$

din care se deduce imediat:

$$a = r_\pi/(2 - r_\pi V_o^2/\mu) ,$$

unde $\mu = 398\,600$ km^3/s^2 şi $V_o = 10{,}95$ km/s; valoarea semiaxei mari rezultă a fi $a = 450\,203$ km.

Excentricitatea se determină după formula:

$$e = 1 - r_\pi/a = 0{,}9853 .$$

Mişcarea medie diurnă rezultă din legea a treia (completă) a lui Kepler:

$$n = \sqrt{\mu/a^3} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}.$$

Orbita rachetei intersectează orbita Lunii la distanţa $r = 384\,000$ km. Anomalia excentrică corespunzătoare punctului de intersecţie se determină din ecuaţia orbitei:

$$r = a(1 - e\cos E),$$

de unde rezultă:

$$\cos E = (a - r)/(ae) \implies E = 1{,}425.$$

Atunci din ecuaţia lui Kepler:

$$E - e\sin E = n(t - \tau)$$

rezultă timpul de parcurs căutat: $t - \tau \cong 60$ ore.

7.49 Punctul material P se mişcă în jurul centrului atractiv S pe o orbită eliptică de excentricitate $e = 0{,}5$. La un moment dat anomalia adevărată a lui P este de 90°. Care este anomalia excentrică la acel moment? Care este valoarea anomaliei adevărate atunci cînd $E = 90^\circ$?

Rezolvare: Se aplică formula:

$$\operatorname{tg}(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\,\operatorname{tg}(E/2)$$

şi se obţin unghiurile căutate: $E = 60^\circ$, respectiv $v = 120^\circ$.

7.50 Unei nave cosmice i se imprimă, la înălţimea de 230 km deasupra suprafeţei Pămîntului, a doua viteză cosmică în direcţia paralelă cu planul orizontului. În cît

timp ajunge racheta la orbita Lunii, considerată cerc cu raza egală cu 384 000 km?

Rezolvare: Deoarece rachetei i s-a imprimat viteza parabolică într-o direcţie în care ea se va îndepărta de Pămînt, desfăşurarea în timp a mişcării este descrisă de ecuaţia mişcării pe parabolă:

$$(1/3)\operatorname{tg}^3(v/2) + \operatorname{tg}(v/2) = 2\sqrt{\mu/p^3}\,(t - \tau),$$

sau de ecuaţia echivalentă:

$$(1/3)(r + p)\sqrt{(2r - p)/\mu} = t - \tau,$$

unde v este anomalia adevărată, p - parametrul orbitei, τ - momentul trecerii prin perigeul orbitei.

În cazul nostru, punctul de plecare al rachetei este tocmai perigeul orbitei, aşa încît:

$$p/2 = R + H_\pi = 6370 + 230 = 6600\ \text{km}.$$

Cu valorile $r = 384\,000$ km, $\mu = 398\,600\ \text{km}^3/\text{s}^2$, obţinem pentru timpul de zbor: $t - \tau = 51{,}5$ ore.

7.51 O navă cosmică se mişcă pe o orbită circulară în jurul Soarelui, raza orbitei fiind de 1 UA. La un moment dat i se imprimă rachetei viteza parabolică. În cît timp va ajunge racheta la orbita planetei Neptun, a cărei rază este de 30 UA, dacă la momentul plecării racheta avea vectorul viteză în planul orbitei planetei, perpendicular pe raza vectoare?

Rezolvare: Se aplică metoda din problema precedentă, cu deosebirea că în cazul de faţă:

$$\mu = k^2 (UA)^3/(zile)^2 ,$$

unde $k = 0,01720209895$ (constanta lui Gauss), iar $r = 30$ UA. Se obţine pentru timpul de zbor: $t - \tau = 13$ ani.

7.52 Să se rezolve problema analogă problemei 7.48, cu condiţia că $V_o = 12,0$ km/s.

Rezolvare: Cu datele $r_\pi = 6600$ km, $V_o = V_\pi = 12,0$ km/s, $\mu = 398\,600$ km^3/s^2, din formula pentru semiaxa mare din problema 7.48, se obţine $a = -17\,170$ km. Valoarea semiaxei mari fiind negativă, orbita este deci o hiperbolă.

Vom aplica acum ecuaţiile mişcării pe hiperbolă:

$$r = |a|(e \operatorname{ch} H - 1) ,$$

$$r_\pi = |a|(e - 1) ,$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau) ,$$

$$n = \sqrt{\mu/|a|^3} .$$

Calculînd pe e după formula:

$$e = 1 + r_\pi/|a| = 1,384 ,$$

obţinem prin intermediul formulei:

$$\operatorname{ch} H = (|a| + r)/(|a|e) ,$$

pentru $r = 384\,000$ km, valoarea $\operatorname{ch} H = 16,88$, care conduce la:

$$H = 3,52 \text{ rad} = 201^\circ 41' .$$

Calculînd şi pe n după formula de mai sus, obţinem valoarea $n = 2,81 \cdot 10^{-4}$ rad/s, iar din cea de-a treia formulă (analogă ecuaţiei lui Kepler), obţinem: $t - \tau = 19,6$ ore.

7.53 Cometa Halley, avînd o orbită eliptică foarte alungită cu $a = 17,047$ UA şi $e = 0,967281$, deplasîndu-se spre Soare, la sfîrşitul anului 1985 şi începutul anului 1986 se va afla în apropierea Soarelui. Considerînd orbita Pămîntului un cerc de rază egală cu 1 UA, iar orbita cometei o parabolă care are distanţa periheliului egală cu cea a orbitei reale, să se calculeze cît timp se află cometa mai aproape de Soare decît Pămîntul.

Rezolvare: Considerînd ecuaţia orbitei parabolice (problema 7.50):

$$(1/3)(r + p)\sqrt{(2r - p)/\mu} = t - \tau ,$$

obţinem, succesiv: $r = 1$ UA, $p = 2r_\pi = 2a(1 - e) = 1,1155$ UA, $\mu = G\mathcal{M}_\odot = 4\pi^2 (UA)^3/(an)^2$, după care, pentru perioada respectivă, se obţine 0,1113 ani $\cong$ 41 zile.

7.54 O navă cosmică interplanetară ce se mişcă pe o orbită kepleriană circumsolară are la un moment dat, cînd anomalia sa adevărată este de 120°, următoarele coordonate rectangulare ecliptice (exprimate în UA):

$$x_1 = 3, \quad y_1 = -4, \quad z_1 = 12 .$$

După un timp, nava ajunge în punctul orbitei avînd următoarele coordonate ecliptice (exprimate în aceleaşi UA):

$$x_2 = -2, \quad y_2 = 8/3, \quad z_2 = -8 .$$

Să se determine elementele orbitale ale navei interplanetare.

Rezolvare: Din datele problemei rezultă că mărimile razelor vectoare heliocentrice corespunzătoare celor două momente sînt:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 13 \text{ (UA)},$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 26/3 \text{ (UA)}$$

şi că cei doi vectori $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ sînt orientaţi în sensuri opuse.

Rezultă că anomalia adevărată v_2, corespunzătoare razei vectoare $\vec{r}_2$, are valoarea: $v_2 = v_1 + 180^\circ = 300^\circ$.

Din relaţia:

$$r_1/r_2 = (1 + e\cos v_2)/(1 + e\cos v_1),$$

cu datele de mai sus, se poate determina excentricitatea orbitei; se obţine $e = 2/21$.

După aceasta se poate obţine semiaxa mare a orbitei, de exemplu, din formula:

$$r_1 = a(1-e^2)/(1 + e\cos v_1),$$

cealaltă formulă putînd servi drept formulă de control; se obţine $a = 260/61$ UA.

Se mai poate obţine parametrul orbitei, după formula:

$$p = a(1-e^2) = 4{,}224 \text{ UA},$$

dar acesta nu este, însă, un element orbital independent de a sau e.

Celelalte elemente orbitale nu pot fi determinate, din motivul că razele vectoare $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ sînt situate pe o aceeaşi dreaptă.

7.55 O navă cosmică interplanetară se mişcă faţă de Soare sub influenţa gravitaţională a acestuia (fără să fie influenţată de acţiunile gravitaţionale ale planetelor), într-un sistem de coordonate Sxyz, sistem drept, al cărui plan fundamental Sxy este planul eclipticii, axa Sx fiind îndreptată spre steaua Regulus (care poate fi considerată, cu precizia cerută de problemă, în planul eclipticii). La trei momente diferite, pentru poziţiile navei s-au obţinut următoarele valori ale coordonatelor sferice ecliptice:

t_1 = 10 X 1980, 12^h TU: $r_1 = 2{,}15 \cdot 10^8$km, $\lambda_1 = 272^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$;

t_2 = 29 XI 1980, 12^hTU: $r_2 = 1{,}86 \cdot 10^8$km, $\lambda_2 = 289^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$;

t_3 = 28 XII 1980, 12^hTU: $r_3 = 1{,}47 \cdot 10^8$km, $\lambda_3 = 303^\circ$, $\beta_3 = 0^\circ$.

Să se calculeze elementele orbitale a, e şi ω.

Rezolvare: Deoarece la fiecare din cele trei momente valoarea latitudinii ecliptice a poziţiei navei este zero, nava interplanetară se mişcă în planul eclipticii. De aceea, din ecuaţia orbitei în coordonate polare, avem:

$$r_k = p/(1 + e\cos(\lambda_k - \omega)), \quad k = 1,2,3.$$

Pe baza acestor relaţii pot fi deduse următoarele formule pentru determinarea elementelor orbitale e şi ω:

$$e = (r_{k+1} - r_k)/(r_k\cos(\lambda_k - \omega) - r_{k+1}\cos(\lambda_{k+1} - \omega)), \quad k = 1,2;$$

$$\operatorname{tg}\omega = -(A_1\cos\lambda_1 + A_2\cos\lambda_2 + A_3\cos\lambda_3)/(A_1\sin\lambda_1 + A_2\sin\lambda_2 + A_3\sin\lambda_3),$$

unde A_1, A_2, A_3 au respectiv expresiile:

$$A_1 = r_1(r_2 - r_3), \quad A_2 = r_2(r_3 - r_1), \quad A_3 = r_3(r_1 - r_2).$$

Se vede că mai întîi se obţine ω; apoi e şi p, iar semiaxa mare a rezultă, în final, din formula:

$$a = p/(1-e^2).$$

Din aceste formule, pe baza datelor numerice ale problemei, obţinem: $a = 124{,}9 \cdot 10^6$ km, $e = 0{,}727$, $\omega = 89^\circ{,}3$.

7.56 Astrul $\mathfrak{S}$ se află la distanţa R de Pământ, coordonatele sale sferice geocentrice ecuatoriale fiind α, δ. Fie $X_\odot$, $Y_\odot$, $Z_\odot$ coordonatele rectangulare geocentrice ecuatoriale ale Soarelui (axa TX trece prin punctul vernal (Υ), iar axa OY este situată în planul ecuatorului ceresc; fig.7.8) şi x, y, z coordonatele rectangulare heliocentrice ecuatoriale ale astrului $\mathfrak{S}$.

Să se arate că pentru determinarea mărimilor R, α, δ au loc formulele:

$$R\cos\alpha\cos\delta = x + X_\odot,$$
$$R\sin\alpha\cos\delta = y + Y_\odot,$$
$$R\sin\delta = z + Z_\odot.$$

Rezolvare: Din fig.7.8, avem relaţia vectorială:

$$\vec{R} = \vec{R}_\odot + \vec{r}, \qquad (7.28)$$

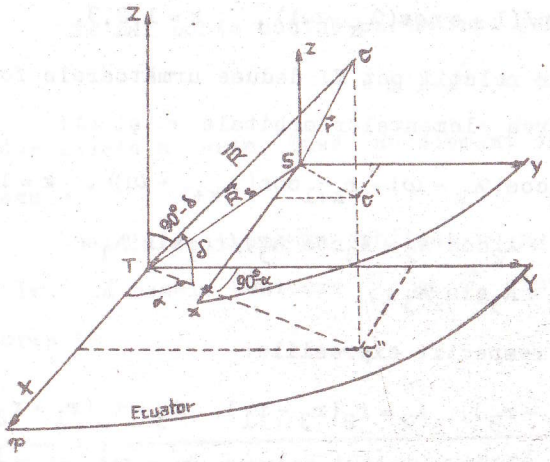

Fig.7.8. Pentru stabilirea relaţiilor de bază ale calculului de efemeride.

care, ţinînd seama de componentele celor trei vectori:

$$\vec{R}(X, Y, Z),$$
$$\vec{R}_\odot(X_\odot, Y_\odot, Z_\odot),$$
$$\vec{r}(x, y, z),$$

este echivalentă cu următoarele relaţii scalare:

$$X = X_\odot + x,$$
$$Y = Y_\odot + y, \qquad (7.29)$$
$$Z = Z_\odot + z.$$

Pe de altă parte, putem scrie:

$$X = R\cos\delta\cos\alpha,$$
$$Y = R\cos\delta\sin\alpha, \qquad (7.30)$$
$$Z = R\sin\delta.$$

Din formulele (7.29) şi (7.30) rezultă imediat relaţiile căutate.

Observaţie: Relaţiile de mai sus stau la baza calculului de efemeride; ele se complică în funcţie de condiţiile diferitelor probleme concrete.

7.57 Să se arate că dacă originea sistemului de coordonate OXYZ se mută în centrul de masă al sistemului de puncte materiale, G, forma ecuaţiilor diferenţiale ale problemei celor n corpuri, precum şi forma integralelor prime nu se schimbă, dar se modifică constantele de integrare, ele fiind numite în acest caz constante baricentrice.

Rezolvare: Notînd cu (x_i, y_i, z_i) coordonatele baricentrice ale punctului P_i de masă m_i, pe baza relaţiei vectoriale:

$$\vec{R}_i = \vec{\varrho} + \vec{r}_i, \quad i = \overline{0,n-1} \qquad (7.31)$$

(vezi fig.7.9), obţinem următoarele relaţii scalare echivalente:

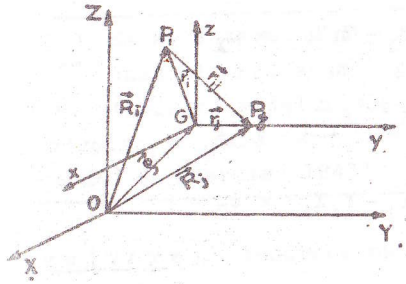

Fig.7.9. Mişcarea sistemului de puncte materiale faţă de centrul de masă, G.

$$X_i = \xi + x_i,$$
$$Y_i = \eta + y_i, \qquad (7.32)$$
$$Z_i = \zeta + z_i,$$

unde componentele ξ, η, ζ ale vectorului $\vec{\varrho}$ reprezintă coordonatele absolute ale centrului de masă, G.

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării absolute faţă de sistemul inerţial OXYZ sînt:

$$\begin{aligned} m_i\, d^2X_i/dt^2 &= \partial U/\partial X_i\,, \\ m_i\, d^2Y_i/dt^2 &= \partial U/\partial Y_i\,, \quad i=\overline{0,n-1} \\ m_i\, d^2Z_i/dt^2 &= \partial U/\partial Z_i\,, \end{aligned} \tag{7.33}$$

unde funcţia de forţă U are expresia:

$$U = G\sum_{\substack{i,j=0\\(i<j)}}^{n-1}{}^{(i)}\, m_i m_j / r_{ij}\,, \tag{7.34}$$

cu $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{R}_j - \vec{R}_i| = \sqrt{(X_j-X_i)^2+(Y_j-Y_i)^2+(Z_j-Z_i)^2}$.

Sistemul diferenţial de mai sus posedă următoarele zece integrale prime:

$$\mathcal{M}\dot{\xi} = a_X,\quad \mathcal{M}\dot{\eta} = a_Y,\quad \mathcal{M}\dot{\zeta} = a_Z\,, \tag{7.35}$$

$$\mathcal{M}\xi = a_X t + b_X,\quad \mathcal{M}\eta = a_Y t + b_Y,\quad \mathcal{M}\zeta = a_Z t + b_Z\,, \tag{7.36}$$

(6 integrale ale mişcării centrului de masă, G), unde am făcut notaţia $\mathcal{M} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i$;

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m_i(Y_i\dot{Z}_i - Z_i\dot{Y}_i) &= c_X\,, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i(Z_i\dot{X}_i - X_i\dot{Z}_i) &= c_Y\,, \\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i(X_i\dot{Y}_i - Y_i\dot{X}_i) &= c_Z \end{aligned} \tag{7.37}$$

(3 integrale ale ariilor);

$$\mathcal{T} + (-U) = h \tag{7.38}$$

unde $\mathcal{T} = (1/2)\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2)$ (o integrală a energiei).

Se observă că, dacă relaţiile de transformare (7.32) se derivează de două ori succesiv în raport cu timpul şi se ţine cont de integralele mişcării centrului de masă, G, se obţin ecuaţiile diferenţiale în sistemul Gxyz:

$$\begin{aligned} m_i\, d^2x_i/dt^2 &= \partial U/\partial x_i\,, \\ m_i\, d^2y_i/dt^2 &= \partial U/\partial y_i\,, \\ m_i\, d^2z_i/dt^2 &= \partial U/\partial z_i\,, \end{aligned} \tag{7.39}$$

unde U are aceeaşi expresie ca mai sus, însă (vezi fig.7.9):

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}\,.$$

Aplicînd teoremele mecanicii asupra sistemului diferenţial obţinut, vom găsi 10 integrale prime analoge cu cele ale ecuaţiilor din sistemul OXYZ, dar constantele de integrare vor fi altele decît cele ce figurează mai sus. Astfel, de exemplu, constantele ariilor în mişcarea baricentrică vor fi notate cu c_x, c_y, c_z şi ele servesc la determinarea poziţiei planului lui Laplace.

7.58 Să se determine mişcarea Soarelui faţă de centrul de masă al unui anumit grup de stele ce conţine şi Soarele, utilizînd modelul mişcării absolute în problema celor n corpuri, mişcare raportată la sistemul inerţial OXYZ (metoda lui A. Bravais, 1843).

Rezolvare: Deoarece putem considera fix centrul de masă al unui grup de stele, G, în integralele prime ale mişcării centrului de masă constantele a_X, a_Y, a_Z vor fi nule.

Din această condiţie rezultă că:

$$\sum_{i=o}^{n-1} m_i \dot{X}_i = 0, \quad \sum_{i=o}^{n-1} m_i \dot{Y}_i = 0, \quad \sum_{i=o}^{n-1} m_i \dot{Z}_i = 0 .$$

Atribuind indicele „o" Soarelui şi presupunînd că:

$$X_i - X_o = x_i, \quad Y_i - Y_o = y_i, \quad Z_i - Z_o = z_i ,$$

obţinem:

$$\mathcal{M}\dot{X}_o + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{x}_i = 0 ,$$

$$\mathcal{M}\dot{Y}_o + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{y}_i = 0 ,$$

$$\mathcal{M}\dot{Z}_o + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i = 0 ,$$

5859 unde $\mathcal{M} = \sum_{i=o}^{n-1} m_i$.

Aceste ecuaţii permit determinarea vitezei Soarelui (a sistemului solar), $\{\dot{X}_o , \dot{Y}_o , \dot{Z}_o\}$ faţă de centrul de masă al grupului de stele ales, G.

Observaţie: Dacă grupul de stele este grupul stelelor strălucitoare (pînă la magnitudinea 6), pentru care se dispune astăzi de cele mai complexe date privind masele şi vitezele radiale, se obţine pentru mişcarea sistemului solar rezultatul că acesta se mişcă în direcţia determinată de următoarele coordonate ecuatoriale: $\alpha = 270^\circ$, $\delta = +30^\circ$, cu o viteză de 19,5 km/s.

7.59 Să se deducă următoarea ecuaţie diferenţială în cadrul problemei celor n corpuri (formula lui Lagrange-Jacobi):

$$d^2J/dt^2 = 2U + 4h ,$$

unde U este funcţia de forţă, h - constanta energiei, iar J - momentul de inerţie faţă de originea sistemului de coordonate, origine situată în centrul de masă al sistemului de n puncte materiale.

Rezolvare: Întrucît funcţia de forţă U, avînd expresia ca în problema precedentă, este o funcţie omogenă de gradul (-1) în raport cu coordonatele, adică:

$$U(tx_o, ty_o, tz_o; tx_1, ty_1, tz_1; \dots ; tx_{n-1}, ty_{n-1}, tz_{n-1}) =$$
$$= t^{-1} U(x_o, y_o, z_o; x_1, y_1, z_1; \dots ; x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$$

pentru orice punct al domeniului său de definiţie şi orice valoare reală a lui t, atunci după teorema lui Euler referitoare la funcţiile omogene are loc egalitatea:

$$\sum_{i=o}^{n-1} ((\partial U/\partial x_i)\, x_i + (\partial U/\partial y_i)\, y_i + (\partial U/\partial z_i)\, z_i) = (-1)U ,$$

în fiecare punct al domeniului de definiţie al funcţiei U, care este, conform cerinţei teoremei, şi diferenţiabilă.

Folosind ecuaţiile mişcării faţă de centrul de masă, G, membrul stîng al relaţiei noastre devine:

$$\sum_{i=o}^{n-1} m_i (x_i\, d^2x_i/dt^2 + y_i\, d^2y_i/dt^2 + z_i\, d^2z_i/dt^2) = -U .$$

Ţinînd seama de integrala energiei şi de expresia energiei cinetice a sistemului de puncte materiale, obţinem:

$$\sum_{i=o}^{n-1} m_i (x_i\, d^2x_i/dt^2 + (dx_i/dt)^2 + y_i\, d^2y_i/dt^2 + (dy_i/dt)^2 +$$
$$+ z_i\, d^2z_i/dt^2 + (dz_i/dt)^2) = U + 2h .$$

Reamintind faptul că momentul de inerţie al sistemului de puncte materiale $P_o(m_o)$, $P_1(m_1)$, ..., $P_{n-1}(m_{n-1})$ faţă de originea G a sistemului de coordonate Gxyz este:

$$J = \sum_{i=o}^{n-1} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) ,$$

se vede uşor, după două derivări succesive în raport cu timpul ale acestei relaţii, că membrul întîi al relaţiei de mai sus este egal cu $(1/2)d^2J/dt^2$, de unde se obţine ecuaţia cerută în enunţ.

Observaţie: Formula lui Lagrange-Jacobi este utilizată în astronomie la cele mai diverse cercetări calitative (studiul stabilităţii mişcării, al ciocnirilor etc.).

7.60 Să se deducă integralele prime ale ecuaţiilor mişcării relative (faţă de punctul material P_o) ale problemei celor n corpuri.

Indicaţie: Se folosesc relaţiile de transformare a ecuaţiilor mişcării relative (faţă de P_o) din ecuaţiile mişcării absolute, precum şi integralele prime ale ecuaţiilor mişcării absolute.

Răspuns: Integralele prime căutate sînt:

$$-(1/\mathcal{M})\Big(\sum_{j=1}^{n-1} m_j y_j \sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^{n-1} m_j z_j \sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{y}_j\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = c_x ,$$

$$-(1/\mathcal{M})\Big(\sum_{j=1}^{n-1} m_j z_j \sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{x}_j - \sum_{j=1}^{n-1} m_j x_j \sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{z}_j\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = c_y ,$$

$$-(1/\mathcal{M})\Big(\sum_{j=1}^{n-1} m_j x_j \sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{y}_j - \sum_{j=1}^{n-1} m_j y_j \sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{x}_j\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = c_z ;$$

$$-(1/(2\mathcal{M}))\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\dot{x}_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\dot{y}_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\dot{z}_i\Big)^2\Big) + (1/2)\sum_{i=1}^{n-1} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h ,$$

unde $\mathcal{M} = \sum_{i=o}^{n-1} m_i$.

7.61 Să se determine condiţiile în care mişcările relative, în problema celor trei corpuri, au loc pe orbite kepleriene (satisfăcînd ecuaţiile mişcării din cadrul problemei a două corpuri) (soluţiile lui Euler şi Lagrange).

Rezolvare: Pornim de la ecuaţiile mişcării absolute din cadrul problemei celor trei corpuri, în care vom folosi indicii 1, 2, 3 (în loc de 0, 1, 2 - notaţiile din manual). Astfel, în sistemul inerţial OXYZ (fig.7.10) avem ecuaţiile:

$$\begin{aligned} d^2\vec{R}_1/dt^2 &= G(m_2/r_{12}^3)\vec{r}_{12} + G(m_3/r_{13}^3)\vec{r}_{13} , \\ d^2\vec{R}_2/dt^2 &= G(m_3/r_{23}^3)\vec{r}_{23} + G(m_1/r_{21}^3)\vec{r}_{21} , \\ d^2\vec{R}_3/dt^2 &= G(m_1/r_{31}^3)\vec{r}_{31} + G(m_2/r_{32}^3)\vec{r}_{32} . \end{aligned} \qquad (7.40)$$

Presupunînd că mişcările relative sînt descrise de vectorii $\vec{r}_{12}$, $\vec{r}_{23}$, $\vec{r}_{31}$ şi ţinînd cont de relaţiile:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= \vec{R}_2 - \vec{R}_1 , \\ \vec{r}_{23} &= \vec{R}_3 - \vec{R}_2 , \\ \vec{r}_{31} &= \vec{R}_1 - \vec{R}_3 , \end{aligned}$$

obţinem următorul sistem diferenţial:

$$d^2\vec{r}_{12}/dt^2 = -G(m_1+m_2)\,\vec{r}_{12}/r_{12}^3 + Gm_3(\vec{r}_{23}/r_{23}^3 + \vec{r}_{31}/r_{31}^3)\,,$$
$$d^2\vec{r}_{23}/dt^2 = -G(m_2+m_3)\,\vec{r}_{23}/r_{23}^3 + Gm_1(\vec{r}_{31}/r_{31}^3 + \vec{r}_{12}/r_{12}^3)\,, \qquad (7.41)$$
$$d^2\vec{r}_{31}/dt^2 = -G(m_3+m_1)\,\vec{r}_{31}/r_{31}^3 + Gm_2(\vec{r}_{12}/r_{12}^3 + \vec{r}_{23}/r_{23}^3)\,.$$

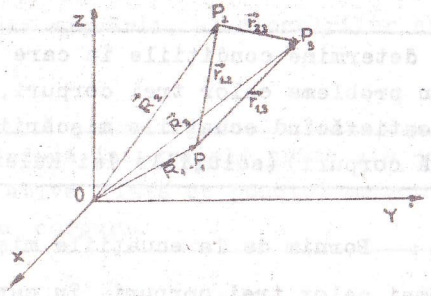

Fig.7.10. Configuraţia generală a celor trei corpuri P_1, P_2, P_3.

Conform ipotezei, mişcările relative ale punctelor materiale P_1, P_2, P_3 au loc pe orbite kepleriene, adică sînt descrise de ecuaţiile diferenţiale de forma:

$$d^2\vec{r}_{12}/dt^2 = -G\,\chi_1\,\vec{r}_{12}/r_{12}^3\,,$$
$$d^2\vec{r}_{23}/dt^2 = -G\,\chi_2\,\vec{r}_{23}/r_{23}^3\,, \qquad (7.42)$$
$$d^2\vec{r}_{31}/dt^2 = -G\,\chi_3\,\vec{r}_{31}/r_{31}^3\,,$$

unde mărimile χ_1, χ_2, χ_3 reprezintă constante independente de timp.

Astfel, condiţiile ca ecuaţiile (7.41) să fie de forma (7.42) sînt:

$$(m_1+m_2-\chi_1)\,\vec{r}_{12}/r_{12}^3 - m_3(\vec{r}_{23}/r_{23}^3 + \vec{r}_{31}/r_{31}^3) = \vec{0}\,,$$
$$(m_2+m_3-\chi_2)\,\vec{r}_{23}/r_{23}^3 - m_1(\vec{r}_{31}/r_{31}^3 + \vec{r}_{12}/r_{12}^3) = \vec{0}\,, \qquad (7.43)$$
$$(m_3+m_1-\chi_3)\,\vec{r}_{31}/r_{31}^3 - m_2(\vec{r}_{12}/r_{12}^3 + \vec{r}_{23}/r_{23}^3) = \vec{0}\,.$$

Ţinînd seama de relaţia evidentă:

$$\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31} = \vec{0}\,, \qquad (7.44)$$

obţinem:

$$\vec{r}_{23}(m_3/r_{23}^3 + (m_1+m_2-\chi_1)/r_{12}^3) +$$
$$+\,\vec{r}_{31}(m_3/r_{31}^3 + (m_1+m_2-\chi_1)/r_{12}^3) = \vec{0}\,,$$
$$\vec{r}_{31}(m_1/r_{31}^3 + (m_2+m_3-\chi_2)/r_{23}^3) +$$
$$+\,\vec{r}_{12}(m_1/r_{12}^3 + (m_2+m_3-\chi_2)/r_{23}^3) = \vec{0}\,, \qquad (7.45)$$
$$\vec{r}_{12}(m_2/r_{12}^3 + (m_3+m_1-\chi_3)/r_{31}^3) +$$
$$+\,\vec{r}_{23}(m_2/r_{23}^3 + (m_3+m_1-\chi_3)/r_{31}^3) = \vec{0}\,.$$

Aceste ecuaţii au loc numai în două cazuri, pe care le vom analiza în cele ce urmează.

1) Cazul cînd vectorii $\vec{r}_{12}$, $\vec{r}_{23}$, $\vec{r}_{31}$ sînt coliniari

Vom considera, de exemplu, că punctele P_1, P_2, P_3 sînt situate în ordinea din fig.7.11. Avem în acest caz relaţia evidentă:

$$r_{31} = r_{12} + r_{23}\,. \qquad (7.46)$$

Introducînd notaţia următoare:

$$\lambda = r_{23}/r_{12}\,, \qquad (7.47)$$

obţinem relaţiile:

$$r_{23} = \lambda r_{12}\,, \qquad r_{31} = (1+\lambda) r_{12}\,. \tag{7.48}$$

Ţinînd cont de (7.48), ca şi de faptul că vectorul $\vec{r}_{31}$ are sens opus vectorilor $\vec{r}_{12}$ şi $\vec{r}_{23}$, din relaţiile (7.45) cantităţile χ_1, χ_2, χ_3 pot fi exprimate astfel:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= m_1 + m_2 - m_3(1+2\lambda)/(\lambda^2(1+\lambda)^2)\,,\\
\chi_2 &= m_2 + m_3 - m_1\lambda^3(2+\lambda)/(1+\lambda)^2\,,\\
\chi_3 &= m_3 + m_1 - m_2(1+\lambda^2)(1+\lambda^{-2})\,.
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Deoarece mărimile χ_i şi m_i $(i=1,2,3)$ sînt constante, rezultă din relaţiile (7.49) că şi cantitatea λ este constantă. Aceasta arată că configuraţia sistemului celor trei puncte materiale rămîne în timpul mişcării asemenea cu sine însăşi.

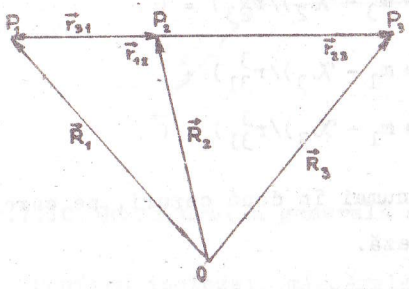

Fig.7.11. Configuraţia coliniară a celor trei corpuri.

Pentru determinarea parametrului λ, să efectuăm înlocuirea relaţiilor (7.48) în ecuaţiile (7.42). Atunci obţinem:

$$\chi_2 = \chi_1\lambda^3\,, \qquad \chi_3 = \chi_1(1+\lambda)^3 \tag{7.50}$$

Dacă în una dintre aceste relaţii înlocuim cantităţile χ_1, χ_2, χ_3 cu expresiile date de (7.49), obţinem pentru parametrul λ următoarea ecuaţie de gradul al cincilea:

$$(m_1+m_2)\lambda^5 + (3m_1+2m_2)\lambda^4 + (3m_1+m_2)\lambda^3 - (3m_3+m_2)\lambda^2 -$$

$$-(2m_2+3m_3)\lambda - m_2 - m_3 = 0\,. \tag{7.51}$$

Întrucît în relaţia de definiţie (7.47) cantitatea λ se presupune pozitivă, căutăm numai rădăcinile pozitive ale acestei ecuaţii. Cum coeficienţii ecuaţiei (7.51) prezintă o singură variaţie de semn, rezultă că această ecuaţie are numai o rădăcină pozitivă (Descartes).

Deci punctele materiale P_1, P_2, P_3 se pot aşeza într-un singur mod, în această ordine, pe o dreaptă, pentru ca acestea, pornind cu o viteză iniţială corespunzătoare, să descrie orbite kepleriene. Mişcările sînt descrise de ecuaţiile (7.42) în care valorile coeficienţilor χ_1, χ_2, χ_3 se determină din relaţiile (7.49), după ce se cunoaşte valoarea lui λ.

Rezultate similare se obţin şi atunci cînd cele 3 puncte materiale sînt aşezate într-o altă ordine.

În acest fel, am ajuns la soluţia lui Euler a problemei celor trei corpuri.

2) Cazul cînd se anulează toţi coeficienţii sistemului de ecuaţii (7.43)

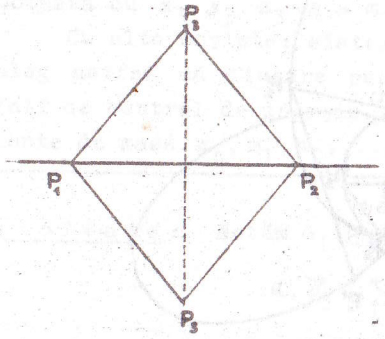

Fig.7.12. Configuraţii echilaterale ale celor trei corpuri.

Din această condiţie rezultă imediat relaţiile:

$$r_{12} = r_{23} = r_{31}\,,$$

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = m_1 + m_2 + m_3\,.$$

Aceste relaţii arată că cele trei puncte materiale sînt aşezate întotdeauna în vîrfurile unui triunghi

echilateral (fig.7.12). Fixînd într-un plan poziţiile a două corpuri, cel de-al treilea corp se poate aşeza în două poziţii în acelaşi plan, pentru a forma cu celelalte două corpuri un triunghi echilateral (fig.7.12).

În acest fel am ajuns la soluţia lui Lagrange a problemei celor trei corpuri, cînd cele trei corpuri se mişcă într-un plan fix, pe orbite kepleriene, formînd tot timpul un triunghi echilateral.

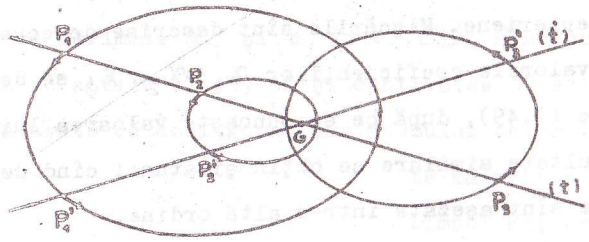

Fig.7.13. Cazul lui Euler cînd cele trei puncte materiale se mişcă pe elipse.

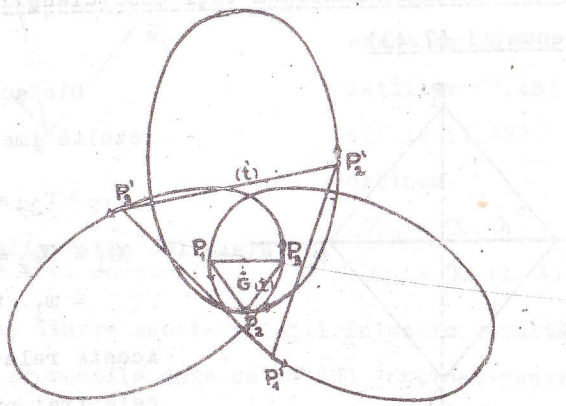

Fig.7.14. Cazul lui Lagrange cînd cele trei puncte materiale se mişcă pe elipse.

Observaţie: Soluţiile lui Euler şi Lagrange, în cazurile cînd orbitele kepleriene sînt elipse, sînt primele orbite periodice descoperite în cadrul problemei celor trei corpuri (fig. 7.13 şi 7.14).

7.62 Să se stabilească forma simetrică a ecuaţiilor mişcării relative, în cadrul problemei celor n corpuri, prin următoarea alegere a coordonatelor relative (coordonatele lui Jacobi; 1842):

- se consideră un sistem de axe paralele cu axele sistemului absolut, avînd centrul în punctul P_0: coordonatele relative ale punctului $P_1(x_1, y_1, z_1)$ se determină faţă de acest sistem de coordonate;
- prin centrul de masă G_1, al punctelor P_0 şi P_1, se duc axe paralele cu axele sistemului precedent: poziţia punctului P_2 se determină faţă de acest sistem prin coordonatele relative x_2, y_2, z_2;
- prin centrul de masă G_2, al punctelor P_0, P_1 şi P_2, se duc iarăşi axe paralele cu axele sistemului precedent şi coordonatele relative ale punctului P_3 în acest sistem se notează cu x_3, y_3, z_3 ş.a.m.d (fig.7.15).

Cu alte cuvinte: sistemele de coordonate succesive se aleg astfel ca fiecare punct de masă m_{i+1} se raportează faţă de centrul de inerţie G_i al tuturor punctelor precedente de mase $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$.

Rezolvare: Notăm $G_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, astfel că:

$$\mathcal{M}_i \vec{\varrho}_i = \sum_{k=0}^{i} m_k \vec{R}_k , \qquad (7.52)$$

de unde:

$$\mathcal{M}_i \xi_i = \sum_{k=0}^{i} m_k X_k , \quad \text{etc.} , \qquad (7.53)$$

unde prin $\mathcal{M}_i$ s-a notat suma:

$$\mathcal{M}_i = \sum_{k=0}^{i} m_k \,. \tag{7.54}$$

Potrivit cu definiţiile din enunţul problemei:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{\varrho}_{i-1}\,, \tag{7.55}$$

$$x_i = X_i - \xi_{i-1}\,, \quad \text{etc.}\,, \tag{7.56}$$

(unde $i \geqslant 1$), din care, după înmulţirea cu $\mathcal{M}_{i-1}$ şi utilizarea relaţiei (7.53), rezultă:

$$\mathcal{M}_{i-1}x_i = \mathcal{M}_{i-1}X_i - \mathcal{M}_{i-1}\xi_{i-1} = \mathcal{M}_{i-1}X_i - \sum_{k=0}^{i-1} m_k X_k, \quad \text{etc.} \tag{7.57}$$

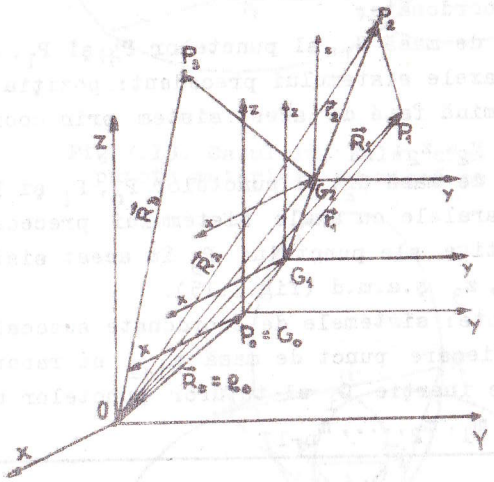

Fig.7.15. Pentru definirea coordonatelor lui Jacobi.

Pentru a exprima vechile coordonate X, Y, Z prin noile coordonate x, y, z, observăm că, pe baza relaţiei (7.53):

$$\mathcal{M}_i \xi_i - \mathcal{M}_{i-1}\xi_{i-1} = m_i X_i, \quad \text{etc.}\,, \tag{7.58}$$

sau:

$$\mathcal{M}_i \xi_i - \mathcal{M}_{i-1}\xi_{i-1} = (\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i-1})X_i, \text{ etc.} \tag{7.59}$$

Prin urmare, pe baza relaţiei (7.57), putem scrie:

$$\mathcal{M}_i(X_{i+1} - x_{i+1}) - \mathcal{M}_{i-1}(X_i - x_i) = (\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i-1})X_i\,,$$

de unde:

$$X_{i+1} - X_i = x_{i+1} - \mathcal{M}_{i-1}\mathcal{M}_i^{-1}x_i\,, \quad \text{etc.} \tag{7.60}$$

Adunînd membru cu membru aceste egalităţi, pentru valorile succesive ale indicelui, obţinem:

$$X_i - X_o = x_1\,,$$
$$X_{i+1} - X_o = x_{i+1} + m_i x_i/\mathcal{M}_i + m_{i-1}x_{i-1}/\mathcal{M}_{i-1} + \ldots + m_1 x_1/\mathcal{M}_1\,. \tag{7.61}$$

Derivînd de două ori în raport cu timpul relaţiile (7.57) şi folosind ecuaţiile diferenţiale ale mişcării absolute, obţinem:

$$\mathcal{M}_{i-1}\,d^2x_i/dt^2 = (\mathcal{M}_{i-1}/m_i)\,\partial U/\partial X_i - \partial U/\partial X_o - \\ - \partial U/\partial X_1 - \ldots - \partial U/\partial X_{i-1}, \text{ etc.} \tag{7.62}$$

Pe de altă parte, tot din (7.57), avem:

$$\partial U/\partial X_o = -\partial U/\partial x_1 - (m_o/\mathcal{M}_1)\,\partial U/\partial x_2 - \\ - (m_o/\mathcal{M}_2)\,\partial U/\partial x_3 - \ldots - (m_o/\mathcal{M}_{n-2})\,\partial U/\partial x_{n-1}\,,$$

$$\partial U/\partial X_1 = \partial U/\partial x_1 - (m_1/\mathcal{M}_1)\,\partial U/\partial x_2 - \\ - (m_1/\mathcal{M}_2)\,\partial U/\partial x_3 - \ldots - (m_1/\mathcal{M}_{n-2})\,\partial U/\partial x_{n-1}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\partial U/\partial X_{n-1} = \partial U/\partial x_{n-1}\,,$$

de unde se obţine cu uşurinţă:

$$\sum_{k=0}^{i-1} \partial U/\partial X_k = -(\mathcal{M}_{i-1}/m_i)\,\partial U/\partial x_i - \\ - (\mathcal{M}_{i-1}/\mathcal{M}_i)\,\partial U/\partial x_{i+1} - \ldots - (\mathcal{M}_{i-1}/\mathcal{M}_{n-2})\,\partial U/\partial x_{n-1}$$

Înlocuind aceste expresii în (7.62), obţinem în final

sistemul diferenţial căutat:

$$\mu_i \, d^2x_i/dt^2 = \partial U/\partial x_i \,,$$
$$\mu_i \, d^2y_i/dt^2 = \partial U/\partial y_i \,, \qquad (7.63)$$
$$\mu_i \, d^2z_i/dt^2 = \partial U/\partial z_i \,,$$

unde am utilizat notaţia:

$$\mu_i = m_i \mathcal{M}_{i-1}/\mathcal{M}_i \,, \quad i = \overline{1,n-1} \,,$$

iar funcţia de forţă U trebuie exprimată prin noile coordonate relative, pe baza relaţiilor (7.61).

Observaţie: Ecuaţiile în variabilele Jacobi se aplică în special la studiul mişcării sateliţilor planetelor, ca şi la studiul mişcărilor în sistemele stelare multiple.

7.63 Să se arate că integralele ariilor şi integrala energiei ale ecuaţiilor mişcării în coordonate relative Jacobi (problema 7.62) au aceeaşi formă ca în cazul ecuaţiilor mişcării absolute, adică sînt de forma:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \gamma_x \,, \quad \text{etc.}$$

şi

$$(1/2) \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h' \,,$$

unde $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sînt constantele ariilor, iar h' - constanta energiei.

7.64 Să se transforme ecuaţiile mişcării relative în coordonate Jacobi, în cadrul problemei celor n corpuri, în sistem canonic.

Rezolvare: Punînd:

$$q_{3i-2} = x_i, \quad q_{3i-1} = y_i, \quad q_{3i} = z_i \,;$$
$$p_{3i-2} = \mu_i \dot{q}_{3i-2}, \quad p_{3i-1} = \mu_i \dot{q}_{3i-1}, \quad p_{3i} = \mu_i \dot{q}_{3i},$$

unde $i = \overline{1,n-1}$, obţinem următorul sistem:

$$dq_k/dt = \partial H/\partial p_k \,,$$
$$dp_k/dt = -\partial H/\partial q_k \,,$$

funcţia lui Hamilton avînd forma:

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} (1/(2\mu_i))(p_{3i-2}^2 + p_{3i-1}^2 + p_{3i}^2) - U \,,$$

în care funcţia de forţă U se exprimă cu ajutorul relaţiilor de transformare a coordonatelor de mai sus în coordonate canonice.

Observaţie: Forma canonică a ecuaţiilor mişcării într-o problemă de dinamică prezintă, în general, avantajul că toate rezultatele matematice cunoscute astăzi în studiul sistemelor hamiltoniene pot fi aplicate cu succes, atît la cercetări cantitative, cît şi la cele calitative asupra diverselor sisteme dinamice.

7.65 Să se adapteze ecuaţiile mişcării relative în coordonate Jacobi (problema 7.62) la cazul mişcării Lunii în jurul Pămîntului, sub acţiunea perturbatoare a Soarelui.

Rezolvare: Fie cele trei corpuri - Pămîntul, Luna şi Soarele - asimilate cu punctele materiale P_0, P_1 şi P_2, respectiv (fig.7.16).

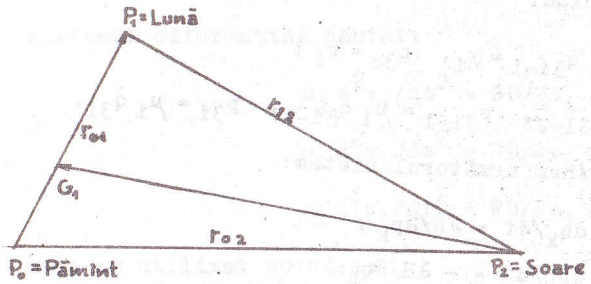

Fig.7.16. Pentru stabilirea coordonatelor Jacobi în cazul sistemului Pămînt-Lună-Soare.

Se presupune că, la studiul mişcării Lunii în jurul Pămîntului, se consideră în prima aproximaţie numai acţiunea perturbatoare din partea Soarelui.

Din sistemul (7.63) (vezi problema 7.62), pentru $i=1$, obţinem ecuaţiile mişcării Lunii faţă de Pămînt:

$$d^2x_1/dt^2 = ((m_0+m_1)/(m_0m_1))\,\partial U/\partial x_1 , \quad \text{etc.},$$

iar pentru $i=2$ obţinem ecuaţiile mişcării Soarelui faţă de centrul de masă al sistemului Pămînt-Lună, G_1:

$$d^2x_2/dt^2 = ((m_0+m_1+m_2)/(m_0+m_1)m_2)\,\partial U/\partial x_2 , \quad \text{etc.}$$

În cazul de faţă, funcţia de forţă U are următoarea expresie:

$$U = G(m_0m_1/r_{01} + m_0m_2/r_{02} + m_1m_2/r_{12}) ,$$

unde:

$$r_{01} = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{1/2} ,$$

$$r_{02} = ((x_2+(m_1/(m_0+m_1))x_1)^2 + (y_2+(m_1/(m_0+m_1))y_1)^2 + (z_2+(m_1/(m_0+m_1))z_1)^2)^{1/2} ,$$

$$r_{12} = ((x_2-(m_0/(m_0+m_1))x_1)^2 + (y_2-(m_0/(m_0+m_1))y_1)^2 + (z_2-(m_0/(m_0+m_1))z_1)^2)^{1/2} .$$

Observaţie: În mecanica cerească se demonstrează că avantajul folosirii ecuaţiilor de mai sus este următorul: mişcarea Soarelui faţă de centrul de masă al sistemului Pămînt-Lună este cunoscută cu o foarte mare precizie, în conformitate cu modelul problemei celor două corpuri, şi drept urmare, în primul sistem de ecuaţii, în expresia funcţiei de forţă U, coordonatele Soarelui pot fi considerate ca fiind funcţii cunoscute de timp, ceea ce facilitează foarte mult rezolvarea problemei.

7.66 Considerăm mişcarea punctului material (P,m) sub acţiunea gravitaţională a două centre atractive (socotite şi ele puncte materiale), (P_1,m_1) şi (P_2,m_2), şi presupunem că $m_1 < m_2$. Presupunem, de asemenea, că masa m este neglijabilă în comparaţie cu m_1 şi m_2, în sensul că punctul material P nu exercită nici o influenţă asupra punctelor materiale P_1 şi P_2 (o asemenea problemă se numeşte în mecanica cerească „problemă restrînsă", ocupînd o situaţie intermediară între problema celor două corpuri şi problema (generală a) celor trei corpuri).

În aceste condiţii, să se demonstreze că locul geometric al punctelor spaţiului în care punctul material P este atras de punctele materiale P_1 şi P_2 cu aceeaşi forţă, adică $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, este o sferă (echigravisferă) şi să se determine raza şi poziţia centrului acesteia.

Rezolvare: Vom căuta, deci, locul geometric al punctelor în care $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, adică:

$$Gmm_1/\|P_1P\|^2 = Gmm_2/\|P_2P\|^2 .$$

Alegînd sistemul de coordonate P_1xy $(P \in P_1x)$ ca în fig. 7.17, în secţiunea plană, obţinem egalitatea:

$$m_1(x^2+y^2)^{-1} = m_2((a-x)^2+y^2)^{-1}, \quad a = \|P_1P_2\|.$$

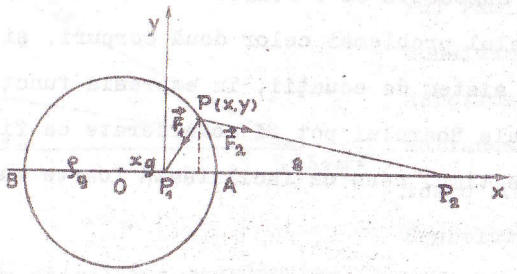

Fig.7.17. Pentru definirea echigravisferei.

După transformări simple, cu condiţia $m_2 - m_1 > 0$ din enunţ, rezultă ecuaţia:

$$(x + (m_1/(m_2-m_1))a)^2 + y^2 = (m_1m_2/(m_2-m_1)^2)a^2,$$

care este ecuaţia unui cerc de rază $\rho_g = (\sqrt{m_1m_2}/(m_2-m_1))a$ şi centrul O situat pe dreapta ce trece prin centrele atractive P_1 şi P_2, la distanţa $|x_g| = (m_1/(m_2-m_1))a$ de centrul atractiv P_1, în partea opusă centrului atractiv P_2 (care are masa mai mare).

Cu folosirea raportului $q = m_1/m_2$, raza şi centrul echigravisferei se exprimă prin formulele:

$$\rho_g = a\sqrt{q}/(1-q), \qquad (7.64)$$
$$|x_g| = aq/(1-q).$$

Observaţie: Demonstrarea teoremei de mai sus se poate face şi prin următoarea metodă (sintetică) simplă: din condiţia pusă rezultă $\|P_1P\|/\|P_2P\| = \sqrt{q}$ (= const.) < 1, adică raportul distanţelor punctului P de la punctele P_1 şi P_2 este constant. În geometria elementară se arată că un asemenea loc geometric este o sferă avînd diametrul $\|AB\|$ („sfera lui Apolloniu").

7.67 Să se exemplifice problema 7.66 în cazul sistemului Pămînt - Lună - nava cosmică, ştiind că $q = 1/81$ şi că $a = 384\,000$ km.

Răspuns: $\rho_g = 43\,000$ km, $|x_g| = 45\,000$ km.

7.68 Să se studieze mişcarea plană a punctului material P, de masă neglijabilă (în sensul restricţiei precizate în problema 7.66, însă fără restricţia pusă pentru masele m_1 şi m_2), sub acţiunea a două centre atractive ce se consideră fixe, P_1 şi P_2 („problema celor două centre fixe" - problemă integrabilă a mecanicii cereşti).

Rezolvare: Presupunem că vectorul viteză iniţială a punctului P se găseşte în planul determinat de punctele P_0, P_1, P_2 (unde P_0 - poziţia iniţială a punctului P), care se consideră drept plan de coordonate, planul Oxy; originea O se ia la mijlocul segmentu-

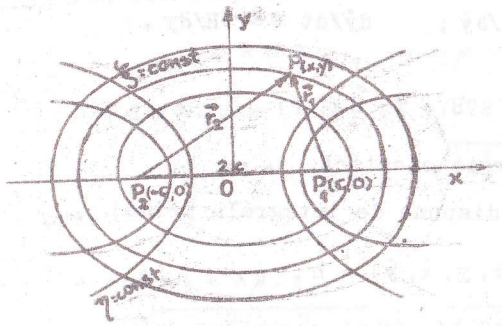

Fig.7.18. Pentru problema celor două centre fixe. Coordonate eliptice.

lui P_1P_2, axa Ox - în direcţia dreptei ce uneşte punctele P_1 şi P_2 (de la P_2 spre P_1) (fig.7.18).

Dacă notăm distanţa dintre centrele fixe cu 2c, atunci razele vectoare ale punctelor P_1 şi P_2 se determină după formulele:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,, \qquad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,. \tag{7.65}$$

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului P, atras de centrele atractive P_1 şi P_2 după legea lui Newton, se scriu:

$$\ddot{x} = \partial U/\partial x\,, \qquad \ddot{y} = \partial U/\partial y\,, \tag{7.66}$$

unde funcţia de forţă a problemei este:

$$U = G(m_1/r_1 + m_2/r_2)\,, \tag{7.67}$$

G fiind constanta gravitaţională; r_1 şi r_2 au expresiile mai sus stabilite.

Acest sistem diferenţial este echivalent cu următorul sistem canonic:

$$dx/dt = \partial H/\partial \dot{x}\,, \quad d\dot{x}/dt = -\partial H/\partial x\,, \qquad dy/dt = \partial H/\partial \dot{y}\,; \quad d\dot{y}/dt = -\partial H/\partial y\,, \tag{7.68}$$

unde:

$$H = T - U\,, \tag{7.69}$$

$T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ fiind energia cinetică.

Sistemul canonic dispune de integrala primă:

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h\,, \tag{7.70}$$

h fiind constantă.

Sistemul (7.66) sau (7.68) neputîndu-se integra direct,

Euler, Legendre şi Lagrange au arătat că este posibilă introducerea unor variabile noi, astfel încît integrala generală a ecuaţiilor transformate să se obţină prin cuadraturi.

Aceste variabile adimensionale sînt determinate prin următoarele formule:

$$\lambda = (r_1 + r_2)/(2c), \quad \mu = (r_1 - r_2)/(2c) \tag{7.71}$$

şi sînt numite coordonatele eliptice ale punctului din planul Oxy.

Este clar că locul geometric al punctelor pentru care λ = = const. este o elipsă avînd focarele în P_1 şi P_2 şi semiaxa mare egală cu $2\lambda c$, iar locul geometric al punctelor pentru care μ = const. este o hiperbolă cu aceleaşi focare şi semiaxa reală egală cu $2\mu c$. Sistemul de referinţă pentru coordonatele eliptice este deci construit dintr-o familie de elipse şi hiperbole homocentrice, avînd focarele în centrele atractive P_1 şi P_2 (fig.7.18).

Deoarece avem inegalităţile:

$$r_1 + r_2 \geq 2c\,, \quad |r_1 - r_2| \leq 2c\,, \tag{7.72}$$

coordonatele eliptice satisfac următoarele inegalităţi:

$$1 \leq \lambda \leq \infty\,, \quad -1 \leq \mu \leq 1\,. \tag{7.73}$$

Din formulele (7.65) şi (7.72) rezultă:

$$x = -c\lambda\mu\,, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\,, \tag{7.74}$$

de unde:

$$\dot{x} = -c(\mu\dot{\lambda} + \lambda\dot{\mu})\,,$$
$$\dot{y} = c\left(\sqrt{(1-\mu^2)/(\lambda^2-1)}\,\lambda\dot{\lambda} - \sqrt{(\lambda^2-1)/(1-\mu^2)}\,\mu\dot{\mu}\right). \tag{7.75}$$

Considerînd λ şi μ drept noile variabile canonice şi

definind impulsurile generalizate corespunzătoare prin formulele:

$$\lambda' = \partial T/\partial\dot\lambda = c^2((\lambda^2-\mu^2)/(\lambda^2-1))\dot\lambda\ ,$$
$$\mu' = \partial T/\partial\dot\mu = c^2((\lambda^2-\mu^2)/(1-\mu^2))\dot\mu\ , \qquad (7.76)$$

ecuaţiile diferenţiale în coordonatele eliptice vor fi:

$$d\lambda/dt = \partial H/\partial\lambda'\ ,\quad d\lambda'/dt = -\partial H/\partial\lambda\ ,$$
$$d\mu/dt = \partial H/\partial\mu'\ ;\quad d\mu'/dt = -\partial H/\partial\mu\ , \qquad (7.77)$$

unde:

$$H = T - U\ ,$$
$$T = (c^2/2)(\lambda^2-\mu^2)(\dot\lambda^2/(\lambda^2-1)+\dot\mu^2/(1-\mu^2)) =$$
$$= (1/(2c^2(\lambda^2-\mu^2)))((\lambda^2-1)\lambda'^2+(1-\mu^2)\mu'^2)\ , \qquad (7.78)$$
$$U = (G/(c(\lambda^2-\mu^2)))((m_1+m_2)\lambda-(m_1-m_2)\mu)\ .$$

Sistemul canonic (7.77), satisfăcînd condiţiile teoremei lui Liouville (precum şi ale lui Stäckel), se integrează prin cuadraturi.

Vom efectua această integrare prin metoda lui Hamilton-Jacobi. Ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi este în cazul nostru:

$$(1/(2c^2(\lambda^2-\mu^2)))((\lambda^2-1)(\partial W/\partial\lambda)^2+(1-\mu^2)(\partial W/\partial\mu)^2) =$$
$$= (G/(c(\lambda^2-\mu^2)))((m_1+m_2)\lambda-(m_1-m_2)\mu)+h\ . \qquad (7.79)$$

Căutînd soluţia acestei ecuaţii sub forma:

$$W = W_1(\lambda)+W_2(\mu)\ , \qquad (7.80)$$

ecuaţia (7.79) va fi verificată dacă punem:

$$(\lambda^2-1)(dW_1/d\lambda)^2 - 2c^2h\lambda^2 - 2Gc(m_1+m_2)\lambda - 2\alpha = 0,$$
$$(1-\mu^2)(dW_2/d\mu)^2 + 2c^2h\mu^2 + 2Gc(m_1-m_2)\mu + 2\alpha = 0, \qquad (7.81)$$

unde α este a doua constantă arbitrară necesară (afară de h).

Fiecare din aceste ecuaţii, conţinînd numai o variabilă independentă, se integrează prin separarea variabilelor.

Integrala completă necesară a ecuaţiei (7.79) se găseşte acum, după formula (7.80), sub forma:

$$W = \int\sqrt{(2c^2h\lambda^2+2Gc(m_1+m_2)\lambda+2\alpha)/(\lambda^2-1)}\ d\lambda +$$
$$+\int\sqrt{(2c^2h\mu^2+2Gc(m_1-m_2)\mu+2\alpha)/(\mu^2-1)}\ d\mu\ . \qquad (7.82)$$

Aplicînd acum teorema Hamilton-Jacobi, obţinem integrala generală a sistemului canonic (7.77) după formulele:

$$\partial W/\partial\alpha = \beta\ ,\quad \partial W/\partial h = t-\gamma\ ,$$
$$\partial W/\partial\lambda = \lambda'\ ,\quad \partial W/\partial\mu = \mu'\ , \qquad (7.83)$$

unde β şi γ sînt constante arbitrare noi.

Calculînd derivatele parţiale indicate, integrala generală se obţine astfel:

$$\int(\sqrt{L(\lambda)})^{-1}d\lambda + \int(\sqrt{M(\mu)})^{-1}d\mu = \sqrt{2}\,\beta\ ,$$
$$\int\lambda^2(\sqrt{L(\lambda)})^{-1}d\lambda + \int\mu^2(\sqrt{M(\mu)})^{-1}d\mu = \sqrt{2}\,(t-\gamma)\ , \qquad (7.84)$$

$$\sqrt{2L(\lambda)}/(\lambda^2-1) = \lambda'\ ,$$
$$\sqrt{2M(\mu)}/(\mu^2-1) = \mu'\ , \qquad (7.85)$$

unde am notat, pentru prescurtare:

$$L(\lambda) = (\lambda^2-1)(c^2h\lambda^2+Gc(m_1+m_2)\lambda+\alpha)\ ,$$
$$M(\mu) = (\mu^2-1)(c^2h\mu^2+Gc(m_1-m_2)\mu+\alpha)\ . \qquad (7.86)$$

Ecuaţiile (7.84) permit determinarea variabilelor λ şi μ ca funcţii de timp, t, şi de patru constante arbitrare, h, α, β, γ, după care ecuaţiile (7.76) şi (7.85) vor da derivatele în raport cu timpul ale acestor variabile:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{2L(\lambda)}/(c^2(\lambda^2-\mu^2)) , \qquad (7.87)$$
$$\dot{\mu} = \sqrt{2M(\mu)}/(c^2(\lambda^2-\mu^2)) .$$

În sfîrşit, coordonatele dreptunghiulare x, y şi componentele vitezei $\dot{x}, \dot{y}$ ale punctului P se obţin după formulele (7.74) şi (7.75).

Dar acest procedeu de obţinere a soluţiei problemei puse nu este eficient, datorită faptului că λ şi μ se determină dintr-un sistem de două ecuaţii transcendente cu două necunoscute. De aceea, E. A. Grebenikov, E. P. Aksionov şi V. G. Diomin au propus un nou procedeu pentru determinarea lui λ şi μ, bazat pe folosirea formulelor (7.87) - reprezentînd de fapt integrale prime ale ecuaţiilor (7.77) - şi pe introducerea unei noi variabile independente, τ, în locul lui t, după formula:

$$\sqrt{2}\, dt = c^2(\lambda^2-\mu^2)\, d\tau . \qquad (7.88)$$

Deoarece, conform formulelor (7.71):

$$c^2(\lambda^2-\mu^2) = r_1 r_2 , \qquad (7.89)$$

noua variabilă τ creşte monoton cu timpul şi poate juca acelaşi rol ca şi t.

Ecuaţiile (7.87) în noua variabilă sînt:

$$d\lambda/d\tau = \sqrt{L(\lambda)} , \qquad (7.90)$$
$$d\mu/d\tau = \sqrt{M(\mu)} ,$$

care ne conduc, după integrare, la următoarele cuadraturi:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} (\sqrt{L(\lambda)})^{-1} d\lambda = \tau - \tau_0 , \qquad (7.91)$$
$$\int_{\mu_0}^{\mu} (\sqrt{M(\mu)})^{-1} d\mu = \tau - \tau_0 ,$$

unde λ_0 şi μ_0 sînt valorile coordonatelor eliptice corespunzătoare valorii iniţiale a variabilei τ ($= \tau_0$), care poate fi considerată corespunzătoare epocii iniţiale t_0; de aceea λ_0 şi μ_0 pot fi considerate drept valorile iniţiale ale variabilelor λ şi μ.

Transformarea integralelor eliptice (7.91) - care depinde, la rîndul său, de rădăcinile polinoamelor (7.86) - ne dă soluţia:

$$\lambda = \lambda(\tau - \tau_0, \lambda_0, h, \alpha) , \qquad (7.92)$$
$$\mu = \mu(\tau - \tau_0, \mu_0, h, \alpha) ,$$

iar, după aceasta, formula (7.88) dă şi timpul:

$$\sqrt{2}\,(t - t_0) = c^2 \int_{\tau_0}^{\tau} (\lambda^2 - \mu^2)\, d\tau . \qquad (7.93)$$

Exprimarea constantelor arbitrare prin valorile iniţiale $x_0, y_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0$ o lăsăm pe seama cititorului.

Răspuns: $h = (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)/2 - G(m_1/\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2} + m_2/\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2})$;

$$\alpha = (1/2)(c^4(\lambda_0^2-\mu_0^2)^2/(\lambda_0^2-1))\dot{\lambda}_0^2 - c^2 h \lambda_0^2 - Gc(m_1+m_2)\lambda_0 =$$
$$= (1/2)(c^4(\lambda_0^2-\mu_0^2)^2/(\mu_0^2-1))\dot{\mu}_0^2 - c^2 h \mu_0^2 - Gc(m_1-m_2)\mu_0 ;$$

$$\sqrt{2}\,\beta = \Phi(\lambda_0, \mu_0, h, \alpha) ;$$

$$\sqrt{2}\,(t_0 - \tau) = \Psi(\lambda_0, \mu_0, h, \alpha) ,$$

prin urmare, soluţia generală a problemei conţine numai patru constante arbitrare independente.

Observaţii: 1) Problema celor două centre fixe este rezolvată şi în cazul generalizat în care punctul material P se mişcă în spaţiu, iar mărimile c_1, c_2 şi m_1, m_2 sînt complexe conjugate; în acest caz se folosesc aşa-numitele coordonate elipsoidale.

2) Interesul faţă de această „problemă restrînsă" clasică a crescut mult în ultimul timp, în legătură cu studiul mişcării sateliţilor artificiali ai Pămîntului şi a navelor cosmice interplanetare. Astfel, în cadrul acestui model matematic se obţine o aproximare suficient de bună a cîmpului gravitaţional real al Pămîntului, iar ecuaţiile mişcării punctului material în cîmpul respectiv se integrează exact, soluţia obţinută sub formă de cuadraturi eliptice fiind mai aproape de realitate decît aproximaţia kepleriană (în cadrul căreia Pămîntul este considerat drept punct material). De asemenea, mişcarea unei nave cosmice ce pleacă, de exemplu, de la Pămînt spre Lună, Venus sau Marte poate fi descrisă cu suficientă aproximaţie pe baza acestui model, întrucît durata zborului de la un corp ceresc la altul este mai scurtă decît perioada de revoluţie a corpurilor respective în jurul „corpurilor lor" centrale.

3) Pe baza integralei energiei şi a altor formule ale modelului matematic al problemei celor două centre fixe - atît în cazul plan, cît şi în cazul generalizat (al mişcării în spaţiu) -, se pot efectua numeroase cercetări calitative asupra domeniilor şi formelor mişcărilor posibile ale punctului material P în raport cu sistemul de referinţă considerat.

7.69 Două puncte materiale, (P_1, m_1) şi (P_2, m_2) se mişcă într-un plan fix, pe baza legii atracţiei universale, descriind cercuri în jurul centrului lor comun de masă (G). Un al treilea punct material, (P, m), „de masă neglijabilă" (în sensul restricţiei precizate în enunţul problemei 7.66), se mişcă în spaţiu, sub acţiunea gravitaţională a primelor două puncte materiale, (P_1, m_1) şi (P_2, m_2). Să se studieze mişcările acestui sistem de trei puncte materiale, atît cantitativ cît şi calitativ („problema restrînsă a celor trei corpuri").

Indicaţii: Se vor scrie, mai întîi, ecuaţiile mişcării „maselor finite" m_1 şi m_2 în sistemul de coordonate GXYZ (sistem fix), care admit soluţia particulară indicată în enunţul problemei. Se vor scrie, apoi, ecuaţiile mişcării absolute a „masei neglijabile" în raport cu acelaşi sistem fix de coordonate, GXYZ. După aceasta, se va alege un sistem de axe de coordonate mobile, Gxyz, considerînd Gm_2 drept axă Gx, iar axa Gy perpendiculară pe direcţia $\overrightarrow{m_1 m_2}$, efectuîndu-se apoi transformarea ecuaţiilor mişcării din sistemul fix GXYZ în sistemul mobil Gxyz. Se va arăta că ecuaţiile diferenţiale ale mişcării, atît în sistemul de referinţă fix, cît şi în sistemul de referinţă mobil, admit o integrală primă asemănătoare integralei energiei (integrala lui Jacobi). În cel de-al doilea sistem de coordonate, pe baza integralei prime obţinute, se va studia cazul $V = 0$ (construirea „suprafeţelor de viteză relativă zero", numite suprafeţele lui Hill, pentru valori date ale constantei de integrare, h) şi se vor delimita regiunile din spaţiu (în secţiunile planelor de coordonate) în care mişcarea punctului material (P, m) este posibi-

lă. Pentru simplitate, se va alege sistemul de unităţi de măsură astfel ca, pentru constanta atracţiei universale, să avem $G = 1$.

Observaţie: Cazul problemei restrînse a trei corpuri are o bibliografie deosebit de vastă, jucînd un rol important în cercetările asupra soluţiilor periodice ale unor sisteme dinamice, precum şi asupra mişcării Lunii, sateliţilor artificiali, sistemelor stelare binare etc.